

Recorrência de Polígonos: Uma Abordagem Dinâmica

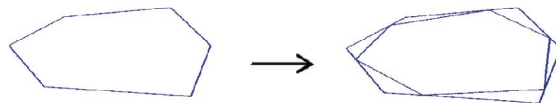
"The world is colors and motion, feelings and thought... and what does math have to do with it?"

Rudy Rucker, *Mind Tools*

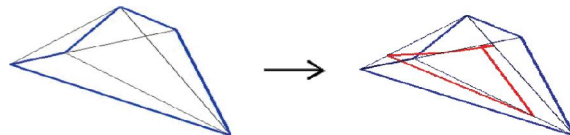
1. Introdução

Neste artigo estudamos alguns processos de construção por recorrência de polígonos planos (um polígono é uma união fechada de segmentos de recta sem auto-intersecções), nomeadamente:

Secção dos lados: partindo de um polígono inicial, dividem-se os lados escolhendo um ponto em cada um. Unindo os pontos obtém-se um novo polígono, ao qual se aplica o mesmo processo.



Secção das diagonais: em vez dos lados, dividem-se as diagonais do polígono, sendo os pontos escolhidos os vértices da nova figura (que poderá não ser um polígono).



Sobre estes métodos de criação de sucessões de polígonos, podemos perguntar: convergem? Em caso afirmativo, de que forma e qual o seu limite? Existirão atributos partilhados pelos elementos de uma dada sucessão? Os processos de construção são injectivos (isto é, cada polígono é imagem de, no máximo, um outro) e/ou sobrejectivos (i.e., qualquer polígono é imagem de um outro por aquele processo)? A seguir veremos uma estratégia para responder a estas questões.

2. Abordagem dinâmica

Aos vértices de cada polígono podemos atribuir coordenadas no plano complexo, identificando-se deste modo os polígonos de n lados com vectores em \mathbb{C}^n (tendo sido arbitrada uma ordenação dos vértices – por exemplo, pelo seu argumento principal, em sentido anti-horário – e escolhida a origem do referencial de forma a estar no interior do polígono). Os processos de construção considerados são aplicações lineares a actuarem nestes vectores. Sejam $Z = (z_1, \dots, z_n)$ o polígono inicial e $Z' = (z'_1, \dots, z'_n)$ a sua imagem. A secção dos lados pode descrever-se pelas fórmulas $z'_i = p_i z_i + (1 - p_i) z_{i+1} \pmod{n}$, onde $p_i \in]0, 1[$ [são os factores de corte (localizam os pontos onde se seccionam os lados)]. Estas fórmulas descrevem uma aplicação linear, $Z' = AZ$, cuja matriz é

¹Este artigo foi realizado no âmbito do Programa Gulbenkian Novos Talentos em Matemática 2007/2008.

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 1-p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 1-p_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 1-p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-p_{n-1} & 1-p_{n-1} \\ 1-p_n & 0 & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}.$$

A secção das diagonais obtém-se de forma semelhante. No caso das primeiras diagonais, as fórmulas de transformação são $z'_i = p_i z_{i-1} + (1-p_i) z_{i+2} \pmod{n}$, pelo que a matriz correspondente é

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 1-p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 1-p_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & 1-p_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-p_{n-1} & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 1-p_n & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}.$$

Para n suficientemente grande, podem considerar-se outras diagonais e respectivas matrizes de transformação. Nesta notação podemos descrever o sistema dinâmico associado à sucessão de polígonos $(Z_k)_k$ definido pela recorrência $Z_{k+1} = AZ_k$ através da iteração da aplicação A , já que, se for Z_0 o polígono inicial, temos $Z_k = A^k Z_0$ para todo k .

Em geral, é impraticável calcular directamente potências de uma matriz. No entanto, sabemos que, sobre o corpo complexo, todos os polinómios não constantes se decompõem em factores do primeiro grau e que, pelo menos no caso em que as n raízes do polinómio característico de A são distintas, A é diagonalizável. Assim, se forem $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ os seus valores próprios (distintos ou não), poderemos, em muitos casos, encontrar uma base u_0, \dots, u_{n-1} de vectores próprios e, escrevendo o polígono inicial Z_0 e as suas imagens por A nessa base,

$$Z_0 = c_0 u_0 + c_1 u_1 + \dots + c_{n-1} u_{n-1} \quad (*)$$

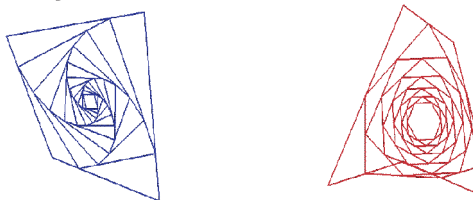
obter

$$A^k Z_0 = c_0 A^k u_0 + c_1 A^k u_1 + \dots + c_{n-1} A^k u_{n-1} = c_0 \lambda_0^k u_0 + c_1 \lambda_1^k u_1 + \dots + c_{n-1} \lambda_{n-1}^k u_{n-1} \quad (\#).$$

O problema fica resolvido se conseguirmos calcular os valores próprios de A , uma base de vectores próprios associados e as coordenadas c_i do polígono inicial nessa base. A dinâmica, como indica $(\#)$, depende da evolução das progressões geométricas de razões λ_i .

3. Secção dos lados com factor de corte único

Apliquemos a abordagem delineada anteriormente ao caso mais simples de recorrência de polígonos, o da secção dos lados em que os factores de corte são *todos iguais*. As figuras sugerem relações entre os polígonos da sucessão que verificaremos de seguida.



Conhecendo a forma geral de A , obtém-se as expressões para os seus valores próprios resolvendo a equação em λ , $\det(A - \lambda I) = 0$. Ora

$$\det[A - \lambda I] = \begin{cases} (p-\lambda)^n - (1-p)^n, & \text{se } n \text{ é par} \\ (p-\lambda)^n + (1-p)^n, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e portanto $\det(A - \lambda I) = 0$ se e só se

$$\begin{cases} \frac{p-\lambda^n}{1-p} = 1, \text{ no caso de } n \text{ é par} \\ \frac{p-\lambda^n}{p-1} = 1, \text{ no caso de } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \lambda_j = p - (1-p)\beta_j, \text{ se } n \text{ é par} \\ \lambda_j = p + (1-p)\beta_j, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (*)$$

onde os β_j representam as raízes complexas da unidade: $\beta_0 = 1, \beta_i = e^{2\pi i i/n}, \beta_j = (\beta_i)^j$. Notemos que

$$|\lambda_j| \leq p + (1-p)|\beta_j| = 1, \text{ e que } |\lambda_j| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_j = -1, \text{ se } n \text{ é par} \\ \beta_j = 1, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_j = 1$$

ou seja, 1 é sempre um valor próprio simples, e todos os restantes têm módulo inferior a 1, pelo que a sucessão (#) converge: de facto, a contribuição do valor próprio 1 mantém-se constante, enquanto as restantes tendem para 0 por iterações de A.

Os vectores próprios associados a cada λ_j são $u_j = (1, -\beta_j, \beta_j^2, \dots, \beta_j^{n-2}, -\beta_j^{n-1})$ para n par, e $u_j = (1, \beta_j, \beta_j^2, \dots, \beta_j^{n-2}, \beta_j^{n-1})$ para n ímpar. Com estes dados, podemos estudar em detalhe o comportamento assintótico do sistema dinâmico.

Resultado 1: O polígono-limite da sucessão é um ponto localizado no centro geométrico do polígono inicial.

Demonstração: Basta calcular o limite pela fórmula (#), tendo em conta a posição do valor próprio 1 para n par ou ímpar, isto é, que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (A^k Z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} (c_0 \lambda_0^k u_0 + c_1 \lambda_1^k u_1 + \dots + c_{n-1} \lambda_{n-1}^k u_{n-1}) = \begin{cases} c_{n/2} u_{n/2}, \text{ se } n \text{ é par} \\ c_0 u_0, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Observe-se que tanto $u_{n/2}$ (n par) como u_0 (n ímpar) são iguais a $(1, \dots, 1)$, concluindo-se daí que o polígono-limite é um ponto. Calculemos as constantes c_0 e $c_{n/2}$ a partir da equação (*):

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix} = c_0 \begin{bmatrix} u_0^1 \\ \dots \\ u_0^n \end{bmatrix} + \dots + c_{n-1} \begin{bmatrix} u_{n-1}^1 \\ \dots \\ u_{n-1}^n \end{bmatrix}$$

$$\text{Para } n \text{ é par: } z_k = (-1)^{k-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_j (\beta_j)^{k-1}$$

$$\text{Para } n \text{ é ímpar: } z_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (\beta_j)^{k-1}$$

Somando todas as equações, obtém-se $z_1 + \dots + z_n = c_0 s_0 + c_1 s_1 + \dots + c_{n-1} s_{n-1}$, onde S_j é a soma

$$\sum_{r=0}^{n-1} (-\beta_j)^r = \begin{cases} \frac{1 - (-\beta_j)^n}{1 + \beta_j} = 0, \text{ se } \beta_j \neq -1 \\ n, \text{ se } \beta_j = -1 \end{cases}, \text{ se } n \text{ é par,}$$

e

$$\sum_{r=0}^{n-1} \beta_j^r = \begin{cases} \frac{1 - \beta_j^n}{1 - \beta_j} = 0, \text{ se } \beta_j \neq 1 \\ n, \text{ se } \beta_j = 1 \end{cases}, \text{ se } n \text{ é ímpar,}$$

concluindo-se que as constantes c_0 (ímpar) e $c_{n/2}$ (par) são iguais a $\frac{z_1 + \dots + z_n}{n}$, o centro do polígono inicial.

A seguir, estudaremos os casos simples, de triângulos ($n = 3$) e quadriláteros ($n = 4$); esta análise é facilmente generalizável para valores de n superiores. Daqui em diante, consideraremos os polígonos centrados na origem do plano (ou seja, $\frac{z_1 + \dots + z_n}{n} = 0$, logo c_0 (n ímpar) e $c_{n/2}$ (n par) são nulos).

3.1 Triângulos

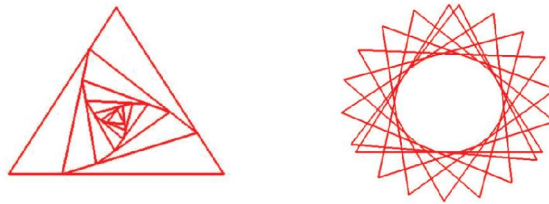
Os valores próprios são neste caso $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = p + (1 - p)\beta, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = p + (1 - p)\bar{\beta}$, com $\beta = e^{2\pi i/3}$. Na equação (#), $c_0 = 0$ e o termo associado a λ_0 é nulo; além disso, sendo $\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\alpha}$, vem, após simplificações,

$$A^k z = |\lambda_1|^k e^{i k \alpha} c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + e^{-i k \alpha} c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Nesta forma, a equação (#) indica a existência de contracção do triângulo à taxa $|\lambda_1|$ e de uma rotação de ângulo α . De facto, calculando a partir de (*) as constantes c_1 e c_2 , tem-se

$$A^k z = |\lambda_1|^k \begin{bmatrix} X_2 \cos(k\alpha + \phi_2) + i Y_2 \cos(k\alpha + \psi_2) \\ X_2 \cos(k\alpha + \phi_2 + 2\frac{\pi}{3}) + i Y_2 \cos(k\alpha + \psi_2 + 2\frac{\pi}{3}) \\ X_2 \cos(k\alpha + \phi_2 + 4\frac{\pi}{3}) + i Y_2 \cos(k\alpha + \psi_2 + 4\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} \tag{2}$$

sendo X_z, Y_z, ϕ_z e ψ_z constantes reais dependentes do polígono inicial. Assim, a menos da homotetia de razão $|\lambda_1|$, em cada iteração de A o triângulo roda inscrito numa elipse (eventualmente degenerada se $\phi_z = \psi_z$; contudo este caso corresponde a um triângulo inicial degenerado num segmento de recta, o que não nos interessa neste estudo) parametrizada por k . Como a diferença de fase entre os pontos se mantém constante ($2\pi/3$ entre pontos consecutivos), os triângulos imagem permanecem semelhantes entre si. As figuras mostram as 6 primeiras iterações, quando $p=3/4$, de um triângulo com (esquerda) e sem (direita) o termo $|\lambda_1|^k$.



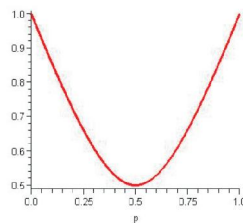
Podemos fazer algumas considerações adicionais para este caso:

- (a) A função A é bijectiva, já que o seu determinante é o produto dos valores próprios não nulos.
- (b) O termo contractivo determina a rapidez de convergência. E a função

$$|\lambda_1| = \sqrt{3p^2 - 3p + 1}$$

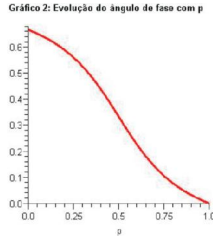
é mínima quando $p=1/2$, ou seja, no caso da bissecção dos lados.

Gráfico 1: Evolução do módulo de contracção com p

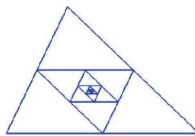


- c) O ângulo α é determinado por p : se $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ e $A(\theta) = 2\arctan \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1}, \theta \in [0, 2\pi]$ então

$$\alpha = 2\arctan \frac{\Im(\lambda_1)}{\Re(\lambda_1) + 1} = 2\arctan \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1 - p}{\sqrt{3p^2 - 3p + 1} + \frac{3p - 1}{2}}$$



de onde se deduz que a órbita de um triângulo pode, a menos de homotetia, ser finita ou infinita. De facto, se $\alpha=2m\pi/n$, com m e n inteiros, a sucessão de triângulos é periódica, contendo um número finito de triângulos distintos. Se $\alpha 2\pi$ é irracional, os vértices descrevem, a menos de homotetia, uma órbita densa na elipse.



Exemplos para órbitas finitas são $p = 1/3, 1/2$ ou $2/3$; se $p = 1/2$, a rotação correspondente é de ângulo π , ou seja, a órbita de um triângulo por bissecção dos lados contém apenas dois elementos, o triângulo original e o que se obtém após essa rotação.

3.2 Quadriláteros

Os valores próprios de A são agora $\lambda_0=2p-1, \lambda_1=p-(1-p)i, \lambda_2=1, \lambda_3=p+(1-p)i$. A contribuição do valor próprio 1 é eliminada por escolha de coordenadas; além de um par de complexos conjugados, como antes, temos agora também um valor próprio real (λ_0), que tem a propriedade de se anular quando $p = 1/2$. Analogamente ao caso anterior

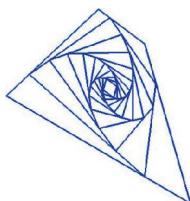
$$A^k z = (2p - 1)^k c_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + |\lambda_1|^k e^{ik\alpha} c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix} + e^{-ik\alpha} c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} =$$

(calculando $c_1 = \frac{1}{4}(z_1 + iz_2 - z_3 - iz_4), c_3 = \frac{1}{4}(z_1 - iz_2 - z_3 + iz_4)$, e escolhendo constantes reais X_z, Y_z, ϕ_z e ψ_z adequadas)

$$= (2p - 1)^k c_0 \mu_0 + |\lambda_1|^k \begin{bmatrix} X_z \cos(k\alpha + \phi_z) + iY_z \cos(k\alpha + \psi_z) \\ X_z \cos(k\alpha + \phi_z - \frac{\pi}{2}) + iY_z \cos(k\alpha + \psi_z - \frac{\pi}{2}) \\ X_z \cos(k\alpha + \phi_z - \pi) + iY_z \cos(k\alpha + \psi_z - \pi) \\ X_z \cos(k\alpha + \phi_z - 3\frac{\pi}{2}) + iY_z \cos(k\alpha + \psi_z - 3\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$$

A principal diferença com a dinâmica dos triângulos é a intervenção do termo associado a λ_0 , que no entanto desaparece quando $p = 1/2$ (bissecção dos lados). Assim, observa-se que o quadrilátero, a menos de módulo, descreve uma elipse em que vértices consecutivos estão desfasados de $\pi/2$ e, como os lados z_i e z_{i-2} têm entre si uma diferença de fase de π (sendo portanto simétricos), o quadrilátero formado tem duas diagonais perpendiculares que se intersectam no centro do mesmo, formando um paralelogramo. Portanto, qualquer quadrilátero ao qual se efectue a bissecção dos lados origina um paralelogramo.

Se $p \neq 1/2$, em geral esta afirmação não é verdadeira: a figura à esquerda, onde se iterou um quadrilátero com



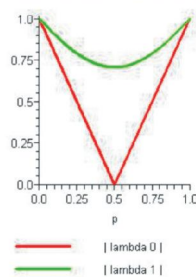
factor de corte $3/4$, fornece um contra-exemplo. Mas um argumento simples permite mostrar que, mesmo nesse caso, os polígonos formados tendem para paralelogramos. De facto, $|\lambda_1|$ é sempre maior do que $|\lambda_0|$ (como se pode ver no gráfico seguinte), pelo que, no limite, quando $k \rightarrow \infty$, a razão $(|\lambda_0|/|\lambda_1|)^k$ tende para 0, isto é, a contribuição do termo associado ao valor próprio real torna-se desprezável em relação à dos complexos conjugados, e o sistema tende para um cenário semelhante ao que se obtém com a bissecção.

Como existe um valor próprio nulo, a função de transformação não é bijectiva: A não é sobrejectiva porque $\text{Im } A = \{\text{paralelogramos}\}$, e não é injectiva porque a coordenada c_0 não tem influência na função (e, portanto, se adicionarmos ao polígono Z_0 o vector $wu_0 = (w, -w, w, -w)$, $w \in \mathbb{C}$, a sua imagem mantém-se).



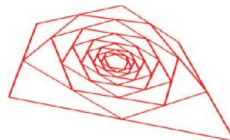
Mais uma vez se constata que a rapidez de convergência é máxima quando $p = 1/2$; veremos adiante que este é um resultado geral.

Gráfico 3: Módulos dos valores próprios: quadriláteros



3.3 Polígonos com $n > 4$

Como anteriormente, as sucessões de polígonos com maior número de lados podem analisar-se através dos valores próprios das matrizes de transformação correspondentes. Por exemplo, no caso dos pentágonos, os valores próprios são $\lambda_0=1$, $\lambda_1=p+(1-p)\beta$, $\lambda_2=p+(1-p)\beta$, $\lambda_3=p+(1-p)\beta=\lambda_2$, $\lambda_4=p+(1-p)\beta=\lambda_1$ ou seja, não existe nenhum valor próprio nulo (A é bijectiva neste caso), existem (para além de 1) dois pares de complexos conjugados (pelo que, em geral, não é possível escrever A como composta de uma homotetia e uma rotação, como nos triângulos) e o pentágono imagem não é semelhante ao original.



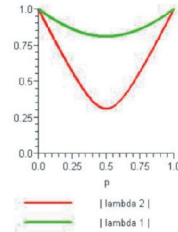
No entanto, analisando os módulos dos valores próprios em função de p , verificamos que $|\lambda_1|$ é sempre superior a $|\lambda_2|$, pelo que, quando se itera A um número suficientemente grande de vezes, o movimento do sistema associado a λ_2 torna-se desprezável, e o sistema tende assintoticamente para uma dinâmica semelhante à dos triângulos. De resto, é fácil observar que para qualquer n existe um valor próprio que domina: os valores próprios são dados pela igualdade $\lambda_j = p \pm (1-p)\beta$, e o seu módulo é tanto maior quanto mais próximos estiverem os seus argumentos. Assim, para n par, o valor próprio de módulo superior corresponde à raiz de 1 com argumento mais próximo de π , enquanto para n ímpar ele corresponde à raiz com argumento mais próximo de 0.

3.4 Resultados gerais

Apresentamos agora algumas conclusões para a secção dos lados com p único.

Resultado 2: A bissecção dos lados corresponde à convergência mais rápida da sucessão de polígonos.

Gráfico 4: Módulos dos valores próprios - pentágonos



Demonstração: Relembrando a fórmula (~) para os valores próprios, podemos escrever $\beta_j = a_j + b_j i$, com $a_j^2 + b_j^2 = 1$. Sabemos que a convergência da sucessão é tanto mais rápida quanto menores os módulos dos valores próprios (excepto o 1), logo o problema reduz-se a minimizar $|\lambda_j|^2$. Uma vez que

$$\lambda_j = [p \pm (1-p)a_j] \pm [(1-p)b_j]i$$

$$|\lambda_j|^2 = 2p^2(1 \mp a_j) - 2p(1 \mp a_j) + 1$$

esta função de p representa uma parábola com concavidade voltada para cima (uma vez que $a_j < 1$) cujo vértice (que corresponde ao mínimo absoluto) tem abcissa $p^* = 1/2$.

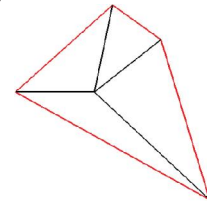
Resultado 3: A secção dos lados é uma aplicação bijectiva, excepto no caso da bissecção em polígonos com número par de lados.

Demonstração: A é bijectiva desde que não haja valores próprios nulos. Mas nós já vimos que, para n ímpar, existe um valor próprio igual a 1, e os restantes têm parte imaginária $(1-p) \text{Im}(\beta_j)$, que é não nula para p em $]0,1[$. Para n par, mais uma vez os valores próprios com parte imaginária nunca se anulam, mas existem dois reais (1 e $2p - 1$), um dos quais se anula para $p = 1/2$. Nesse caso, uma translação associada ao vector próprio $u_0 = (1, -1, \dots, 1, -1)$ deixa invariante a imagem por A de cada polígono $Z_0 = (z_1, \dots, z_n)$, logo $A^{-1}(AZ_0) = \{(z_1 + w, z_2 - w, \dots, z_{n-1} + w, z_n - w), w \in \mathbb{C}\}$.

O resultado seguinte está relacionado com uma questão natural quando se estudam polígonos, o cálculo de áreas. Queremos saber qual a variação de área das sucessivas imagens por secção dos lados.

Resultado 4: Para valores de k suficientemente grandes, $\text{Area}(A^{k+1}Z_0) \approx |\lambda_D|^2 \text{Area}(A^k Z_0)$, onde λ_D é o valor próprio distinto de 1 e de maior módulo de A . A aproximação é uma igualdade para todo o k no caso de triângulos e quadriláteros.

Demonstração: Começemos pela segunda parte do resultado. Para calcular a área de um polígono genérico conhecendo as posições dos vértices no plano, e supondo-se que o polígono está centrado em 0, podemos dividi-lo em triângulos de áreas S_i , como se mostra à direita, e calcular a sua área como a soma das S_i , sendo



$$S_i = \frac{1}{2} \det[z_i, z_{i+1}] = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{bmatrix}.$$

Dado um polígono Z de área S , podemos calcular a área da sua imagem, S' , recordando que $z'_i = pz_i + (1-p)z_{i+1}$. Por exemplo:

(a) No caso dos triângulos, temos

$$S' = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \det[z'_i, z'_{i+1}] = \frac{1}{2} (\det[pz_1 + (1-p)z_2, pz_2 + (1-p)z_3] + \det[pz_2 + (1-p)z_3, pz_3 + (1-p)z_1] + \det[pz_3 + (1-p)z_1, pz_1 + (1-p)z_2])$$

$$= p^2 + (1-p)^2 - p(1-p)S = (3p^2 - 3p + 1)S = |\lambda_D|^2 S.$$

(b) Para os quadriláteros,

$$S' = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} \det[z'_i, z'_{i+1}] = \frac{1}{2} (\det[pz_1 + (1-p)z_2, pz_2 + (1-p)z_3] + \det[pz_2 + (1-p)z_3, pz_3 + (1-p)z_4] + \det[pz_3 + (1-p)z_4, pz_4 + (1-p)z_1] + \det[pz_4 + (1-p)z_1, pz_1 + (1-p)z_2])$$

$$= p^2 + (1-p)^2 S = (2p^2 - 2p + 1)S = |\lambda_D|^2 S.$$

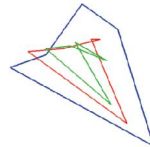
Este resultado não é inesperado, pois já vimos que para triângulos o sistema dinâmico se descreve como uma contracção de razão $|\lambda_D|$, que reduz a área de qualquer polígono a uma taxa $|\lambda_D|^2$, e uma rotação em torno do seu centro geométrico, que não a altera. No entanto, no caso dos quadriláteros, bem como no de quaisquer polígonos com número par de lados, existe um valor próprio real além do 1, o que poderia significar um desvio relativamente ao que intuimos. Contudo, uma translação associada ao vector próprio correspondente a $\lambda_D, u_0 = (1, -1, \dots, 1, -1)$ não altera as áreas.

Generalizemos estas conclusões para polígonos com $2m + 1$ lados, $m > 1$: existem m pares de valores próprios complexos conjugados, aos quais corresponde o mesmo número de movimentos contracção/rotação somados. Como um valor próprio λ_D é dominante, para um número de iterações suficientemente grande apenas o movimento associado a este vector é visível, resultando daí a fórmula aproximada para as áreas.

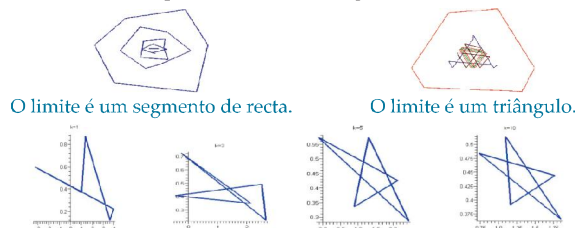
4. Secção das diagonais com factor de corte único

Comecemos por notar que devemos considerar $n \geq 5$ para termos diagonais suficientes. Esta construção tem resultados muito distintos dos observados para a secção dos lados, por duas razões:

(a) A imagem de um polígono por secção das diagonais pode não ser um polígono (i.e., podem ocorrer auto-intersecções nas figuras geradas); algumas questões, como a das áreas, perdem assim significado.



(b) Como veremos, embora a sucessão continue a ser convergente, o limite não é necessariamente um ponto, como acontecia anteriormente. De facto, o problema da convergência é o mais interessante neste caso.



Estudemos com mais detalhe a secção das primeiras diagonais, dada por

$$z'_i = pz_i + (1-p)z_{i+2} \pmod{n}.$$

Já conhecemos a matriz de transformação A (secção 2); resta-nos calcular os seus valores e vectores próprios atendendo à paridade de n .

4.1 n ímpar

As soluções da equação característica de A , $\det[A - \lambda I] = (p - \lambda)^n + (1 - p)^n = 0$, são $\lambda_j = p + (1 - p)\beta_j$, com vectores próprios

$u_j = 1, \beta_j^{\frac{n+1}{2}}, \beta_j, \beta_j^{\frac{n+1}{2}+1}, \dots, \beta_j^{n-1}, \beta_j^{\frac{n+1}{2}-1}$. Assim, deduzimos novamente que existe um único valor próprio 1 (é também fácil confirmar que não existem valores próprios nulos, logo a transformação é bijectiva) e que a contribuição de todos os outros tende para 0 pelas iterações de A (a fórmula é a mesma), logo basta-nos procurar o vector próprio associado a λ_D , que é $u_0 = (1, \dots, 1)$.

Resultado 5: O limite da sucessão de polígonos por secção das 1.ª diagonais com p único e número ímpar de lados é um ponto, o centro geométrico do polígono inicial.

Demonstração: A segunda parte da afirmação prova-se notando que o centro geométrico é preservado entre iterações: $z'_1 + \dots + z'_n = pz_1 + (1-p)z_3 + pz_2 + (1-p)z_4 + \dots + pz_n + (1-p)z_2 = z_1 + \dots + z_n$. Para além de calcularmos o limite da

sucessão, podemos ainda determinar a forma aproximada dos iterados de A após um número grande de iterações, situação em que só interessa a contribuição do valor próprio dominante λ_1 . Sendo $\beta_i = e^{2\pi i/n}$, concluímos que o polígono-limite é determinado (a menos de homotetia) pelo vector próprio associado a λ_1 , que designámos por u_1 ,

$$A^k Z \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} 1, \beta_1^{\frac{nk}{2}}, \beta_1, \beta_1^{\frac{nk}{2}+1}, \dots, \beta_1^{nk}, \beta_1^{\frac{nk}{2}-1}.$$

Por exemplo, para $n = 5$, temos $u_1 = \beta_1^3, \beta_1, \beta_1^4, \beta_1^2$. Comparando os argumentos de cada coordenada, é fácil ver que o polígono-limite é uma estrela de cinco pontas. Mais geralmente, o polígono-limite, quando n é ímpar, é uma estrela de n pontas. As figuras anteriores mostram iterações de um pentágono.

4.2 n par

A equação característica de A é agora $[(p - \lambda)^{\frac{n}{2}} - (p - 1)^{\frac{n}{2}}]^2 = 0$, ou seja, $\frac{p - \lambda}{p - 1} = 1$. As diferenças em relação ao

caso ímpar são notórias: em primeiro lugar, todos os valores próprios têm multiplicidade 2, correspondendo, a cada um, dois vectores próprios linearmente independentes dados pela expressão

$$\lambda_k = p + (1 - p) \beta_{2k}, \quad k \in \{0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}.$$

Um dos valores próprios é 1 e, no caso em que $n/2$ é par, há um (único) valor próprio que se pode anular, que é $\lambda_{n/4} = 2p - 1$, dando origem a uma dinâmica não bijectiva. Para decidirmos sobre a questão da convergência, determinemos os dois vectores próprios linearmente independentes associados a cada λ_k

$$u_k = \{(0, 1, 0, \beta_{2k}, \dots, 0, \beta_{2k}^{n/2-1}), (1, 0, \beta_{2k}, \dots, \beta_{2k}^{n/2-1}, 0)\}.$$

Podemos agora conferir o efeito da multiplicidade 2 na convergência da sucessão: substituindo valores adequados, vem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (A^k Z_0) = \alpha u_{0,1} + \beta u_{0,2} = \alpha, \beta, \dots, \alpha, \beta$$

onde os caracteres gregos são as coordenadas de Z_0 na base formada por $\{u_{k,i}\}_{\substack{k \in \{0, \dots, n/2-1\} \\ i \in \{0, 1\}}}$. Atendendo nestas expressões, conclui-se que, dependendo de as duas coordenadas arbitrárias serem ou não iguais, a sucessão pode convergir para um ponto, mas o limite é em geral um segmento de recta "contado $n/2$ vezes".

O estudo que aqui foi feito para a secção das primeiras diagonais pode ser repetido para as segundas, terceiras, etc., se for possível calcular os valores próprios das diferentes matrizes de transformação. Por exemplo, na secção das segundas diagonais, existem situações em que os valores próprios têm multiplicidade 3, o que justifica (por argumentos semelhantes aos já usados) a existência de triângulos como polígonos-limite nestes casos.

5. O caso geral – factores de corte distintos

Ao considerar n factores de corte (um para cada lado), em vez de apenas um, a abordagem que temos seguido, dependente do cálculo dos valores/vectores próprios da matriz da transformação, pode não ter sucesso. Estudemos por isso apenas a secção dos lados. Existe desde logo uma diferença importante com o cenário anterior: a assimetria no corte poderá significar que o limite da sucessão de polígonos deixe de ser o centro geométrico de Z_0 .



Já sabemos que a matriz correspondente é

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 1-p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 1-p_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 1-p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{n-1} & 1-p_{n-1} \\ 1-p_n & 0 & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

e a equação característica a analisar é

$$(p_1 - \lambda) \dots (p_n - \lambda) = (-1)^{n+1} (1 - p_1) \dots (1 - p_n) = 0$$

que, tendo grau n , pode ser resolvida explicitamente para valores baixos de n (até 4) mas não admite as soluções simples que foram obtidas para p único (e pode não ter solução por radicais para $n \geq 5$). Analisando a equação anterior, podemos, todavia, tirar algumas conclusões imediatas:

- (a) $\lambda = 1$ é valor próprio simples, para todo o p_i e todo o n ;
- (b) a solução $\lambda = 0$ existe (e portanto A não é bijectiva) somente quando n é par e $p_1 \dots p_n = (1 - p_1) \dots (1 - p_n) = 0$; note-se que, se fizermos $p_i = p$, para todo o i , obtemos a condição $p = 1/2$.

Analisemos o caso dos triângulos, comparando a dinâmica com a de factor de corte único.

5.1 Triângulos – considerações gerais

Dividindo a equação característica por $\lambda - 1$ obtemos a equação de 2.º grau

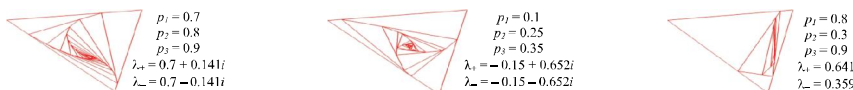
$$\lambda^2 + (1 - p_1 - p_2 - p_3)\lambda + p_1 p_2 p_3 + (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = 0$$

cujas soluções são

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2 + p_3 - 1) \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 2(p_1 + p_2 + p_3) - 2(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3) - 3}$$

A equação $(A - \lambda_{\pm} I_n)u = 0$ dá-nos os vectores próprios $u_{\pm} = 1, \frac{\lambda_{\pm} - p_1}{1 - p_1}, \frac{1 - p_3}{\lambda_{\pm} - p_3} = 1, u_{\pm}^1, u_{\pm}^2$ e a pergunta natural a

colocar é se a dinâmica deste sistema é comparável à que foi vista para um único factor de corte; nomeadamente, se a aplicação A é composta de uma contracção e uma rotação. A resposta é, em geral, não. De facto, enquanto, com p único, obtínhamos (para além de 1) um par de valores próprios complexos conjugados, existem valores de p_i para os quais todos os valores próprios são reais, o que se traduz numa dinâmica totalmente diferente. Vejamos alguns exemplos: nas figuras seguintes, o mesmo triângulo é sujeito à secção dos lados com várias combinações de factores de corte:



Observa-se que, quando λ_{\pm} são complexos, a evolução da sequência de triângulos assemelha-se à obtida para p único, ainda que com perda de simetrias (cujos efeitos mais evidentes são a não conservação do centro geométrico entre iterações e a não semelhança entre os triângulos de uma mesma sucessão). Contudo, quando estes valores são reais, obtemos uma progressão muito distinta: a forma dos triângulos iterados altera-se rapidamente, divergindo da original, e não observamos rotação. A natureza de λ_{\pm} é o factor decisivo na dinâmica destes sistemas, como indica o próximo resultado.

Resultado 6: *Existem duas evoluções possíveis para a sucessão de triângulos por secção dos lados:*

(a) *Se λ_{\pm} são reais, a dinâmica pode ser descrita como composição de uma translação do centro geométrico, uma homotetia de módulo $\max\{|\lambda_+|, |\lambda_-|\}$ e de translações individuais dos vértices, sendo que nestas últimas os vértices se deslocam em rectas paralelas duas a duas.*

(b) *Se λ_{\pm} são complexos, o sistema evolui como composição de uma translação do centro geométrico, uma homotetia de módulo $|\lambda_{\pm}|$ e de rotações individuais dos vértices, sendo que nestas últimas os vértices se deslocam em elipses idênticas a menos de factores de escala.*

Demonstração: A primeira consideração a fazer é a de que o centro geométrico não é preservado entre iterações, resultando num movimento de translação, comum a todos os casos, que pode ser eliminado ignorando a contribuição (constante) associada ao vector próprio $u_0 = (1, 1, 1)$. Começemos por tomar λ_{\pm}, λ reais e supor que $|\lambda_+| > |\lambda_-|$. Escrevendo o triângulo inicial Z_0 na base própria e não considerando o termo em $\lambda_0 = 1$, obtemos

$$A^k Z_0 = \lambda_+^k c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ u_+^1 \\ u_+^2 \end{bmatrix} + \lambda_-^k c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ u_-^1 \\ u_-^2 \end{bmatrix} = \lambda_+^k \begin{bmatrix} c_1 + \frac{\lambda_-^k}{\lambda_+^k} c_2 \\ c_1 u_+^1 + \frac{\lambda_-^k}{\lambda_+^k} u_-^1 c_2 \\ c_1 u_+^2 + \frac{\lambda_-^k}{\lambda_+^k} u_-^2 c_2 \end{bmatrix}$$

onde apenas c_1 e c_2 são números complexos não reais. Assim, se $t = (\lambda / \lambda_0)^k$, as coordenadas do vector $A^k Z_0$ definem rectas $r_j(t) = a_j c_1 + b_j c_2 t$, onde a_j, b_j são constantes reais dependentes de Z_0 . Estas rectas são paralelas, com vectores directores colineares com c_2 . Além disso, se $|\lambda_+| < |\lambda_-|$, o parâmetro t diverge para infinito com k . Basta então evidenciar λ_+ fazendo $t' = 1/t$, para se obterem as rectas $r_j'(t) = a_j c_1 t + b_j c_2$ e se verificar que a dinâmica é inteiramente análoga. No caso particular de $\lambda_+ = \lambda_- = \lambda$, o valor próprio resultante tem multiplicidade 2, mas o seu subespaço próprio tem dimensão 1 (já que $u_+ = u_- = u$), o que significa que A não é diagonalizável e o método até aqui utilizado não é válido. Contudo, podemos escrever A na forma canónica de Jordan, encontrando uma matriz de mudança de base $P = [u_0 \ u \ v] \in GL(3, \mathbb{C})$ tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

onde $v = (v^1, v^2, v^3)$ é um vector próprio generalizado associado a λ . Nesta forma, o cálculo das iterações de A , não sendo tão imediato como antes, é ainda viável. Se forem d_0, d_1, d_2 as coordenadas de Z_0 na base $\{u_0 \ u \ v\}$ de \mathbb{C}^3 temos

$$\begin{aligned} A^k Z_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ \lambda^k d_1 + k d_2 \\ \lambda^k d_2 \end{bmatrix} \\ &= d_0 u_0 + \lambda^{k-1} (\lambda d_1 + k d_2) u + \lambda d_2 v \\ &= d_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda^{k-1} \begin{bmatrix} \lambda(d_1 u^1 + d_2 v^1) + k d_2 u^1 \\ \lambda(d_1 u^2 + d_2 v^2) + k d_2 u^2 \\ \lambda(d_1 u^3 + d_2 v^3) + k d_2 u^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

concluindo-se que a dinâmica é semelhante à anterior, na medida em que os vértices se deslocam, a menos de módulo $|\lambda|$, em rectas parametrizadas pelo termo k , paralelas pois têm vectores directores colineares. Contudo, este movimento não é normalizável, ao contrário do que acontecia nos casos anteriores.

Suponhamos agora que λ_+, λ_- são complexos, digamos $\lambda_{\pm} = |\lambda| e^{i\theta_{\pm}}$, sendo os vectores u_{\pm} de coordenadas $u^j = |u^j| e^{i\theta_j}$ conjugados. Então

$$\begin{aligned} A^k Z_0 &= |\lambda|^k e^{-ik\alpha} c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} + e^{ik\alpha} c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} \\ &= |\lambda|^k \begin{bmatrix} e^{-ik\alpha} c_1 + e^{ik\alpha} c_2 \\ |u^1| e^{i(k\alpha + \theta_1)} c_1 + e^{-i(k\alpha + \theta_1)} c_2 \\ |u^2| e^{i(k\alpha + \theta_2)} c_1 + e^{-i(k\alpha + \theta_2)} c_2 \end{bmatrix} \\ &= |\lambda|^k \begin{bmatrix} X_2 \cos(k\alpha + \phi_2) + i Y_2 \cos(k\alpha + \psi_2) \\ |u^1| X_2 \cos(k\alpha + \phi_2 + \theta_1) + i Y_2 \cos(k\alpha + \psi_2 + \theta_1) \\ |u^2| X_2 \cos(k\alpha + \phi_2 + \theta_2) + i Y_2 \cos(k\alpha + \psi_2 + \theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

É agora óbvio que, a menos de homotetia de módulo $|\lambda|$, os três vértices percorrem elipses idênticas parametrizadas por k , não se tendo em conta os factores de escala $|u^j|$. De notar que, no caso de factor de corte único, os factores de escala são iguais a 1, porque todas as entradas dos vectores próprios u_j têm módulo 1.

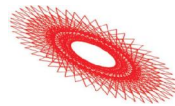
Podemos observar graficamente as dinâmicas de translação (no caso real) e rotação (no caso complexo) eliminando os efeitos das outras transformações, o que se faz centrando todos os iterados na origem e dividindo pela k -ésima potência de λ_{\pm} .



Nesta figura pode ver-se claramente a deslocação em linha recta de dois dos vértices do triângulo.



Neste caso complexo, após 5 iterações, a figura ainda parece pouco simétrica, devido ao facto de os vértices rodarem com fases diferentes, em elipses diferentes, mas após 50 iterações são perfeitamente visíveis as três elipses que contêm os vértices dos diferentes triângulos.



Uma questão permanece por abordar: qual o limite da sucessão de polígonos nestas circunstâncias? O problema é conceptualmente elementar: basta calcular a coordenada c_0 de Z_0 na base própria

$$Z_0 = c_0 u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\lambda_1 - p_1}{1 - p_1} & \frac{\lambda_2 - p_1}{1 - p_1} \\ 1 & \frac{\lambda_1 - p_2}{\lambda_1 - p_3} & \frac{\lambda_2 - p_2}{\lambda_2 - p_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

onde, se P é a matriz de coeficientes do sistema e Q a sua inversa, se tem $c_0 = Q_1^1 z_1 + Q_2^1 z_2 + Q_3^1 z_3$. Logo:

Resultado 7: Para factores de corte $\{p_1, p_2, p_3\}$, o limite da sucessão de triângulos por secção dos lados é dado por

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k Z_0 = \frac{z_1(1 + p_2 p_3 - p_2 - p_3) + z_2(1 + p_1 p_3 - p_1 - p_3) + z_3(1 + p_1 p_2 - p_1 - p_2)}{p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1 - 2(p_1 + p_2 + p_3) + 3}$$

Podemos verificar-se que esta expressão é ainda válida no caso em que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, não abrangido pela demonstração aqui feita, notando-se que, como $|\lambda| < 1$, basta calcular a coordenada d_0 de Z_0 na base $\{u_0, u, v\}$ correspondente à forma canónica de Jordan de A nessa situação particular. Note-se que esta expressão contém como caso particular o de $p_1 = p_2 = p_3 = p$, em que se reduz a

$$\frac{(z_1 + z_2 + z_3)(p^2 - 2p + 1)}{3p^2 - 6p + 3} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

5.2 Triângulos - dois casos particulares

5.2.1 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Esta escolha de p_i facilita a resolução da equação que fornece os valores próprios λ_z

$$\lambda^2 + (1 - p_1 - p_2 - p_3)\lambda + p_1 p_2 p_3 + (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = 0$$

pois, nesse caso, o termo em λ desaparece e as raízes são

$$\lambda_z = \pm i \sqrt{p_1 p_2 p_3 + (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)}$$

Temos, portanto, valores próprios imaginários puros. Isso significa que o parâmetro α das elipses que os vértices (a menos de translação por $c_0 u_0$ e de módulo) percorrem é igual a $\pi/2$, sendo portanto a órbita de cada triângulo finita (contém apenas 4 elementos). Notemos que esta é a generalização do caso de p único, quando se considera $p = 1/3$. A fórmula do limite da sucessão para esta escolha de p_i reduz-se a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k Z_0 = \frac{z_1(p_1 + p_2 p_3) + z_2(p_2 + p_1 p_3) + z_3(p_3 + p_1 p_2)}{p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1 + 1}$$



$p_1=0.42, p_2=0.36, p_3=0.22$



Dinâmica a menos de translação e módulo

5.2.2 $p_1 = p - \Delta p, p_2 = p, p_3 = p + \Delta p$

O interesse desta particularização está em podermos ver o que acontece quando $\Delta p \rightarrow 0$, um modo de nos aproximarmos do caso em que há um factor de corte único. Os valores próprios de A são

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} 3p - 1 \pm \sqrt{3} \sqrt{-(1-p)^2 + \frac{4}{3} \Delta p^2},$$

igualdade que exhibe a dependência do termo Δp . Este caso é bastante abrangente em termos de dinâmica: existem valores de p e Δp tais que λ_{\pm} são complexos, mas também os há em que estes valores próprios são reais, bastando para isso que p e Δp satisfaçam a condição

$$\frac{4}{3} \Delta p^2 \geq (1-p)^2 \text{ ou seja } \Delta p \geq \frac{\sqrt{3}}{2} (1-p).$$

E, neste caso,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k Z_0 = \frac{(1-p)^2(z_1 + z_2 + z_3) + z_1(\Delta p(p-1)) + z_2 \Delta p^2 + z_3(\Delta p(1-p))}{3(1-p)^2 - \Delta p^2},$$

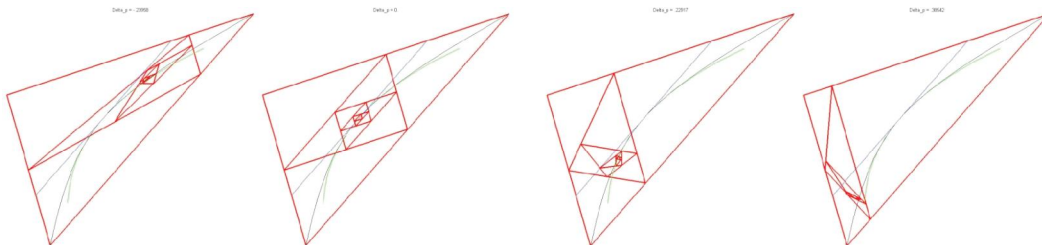
fórmula que deixa evidente a influência distinta no resultado da adição do termo correctivo Δp a cada um dos vértices do triângulo original.

Quando $\Delta p \rightarrow 0$, o desenvolvimento em série de Taylor de 2.ª ordem do limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k Z_0 \sim \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} + \frac{1}{(1-p)^2} \left[(z_1(p-1) + z_3(1-p)) \frac{\Delta p}{3} + (z_1 - 2z_2 + z_3) \frac{\Delta p^2}{9} \right]$$

mostra que, em primeira ordem, z_2 não contribui para a correcção pois, para Δp próximo de 0, o deslocamento do centro faz-se segundo uma combinação linear dos vectores z_1 e z_3 , que correspondem aos lados cujo factor de corte foi alterado.

Vejamos um exemplo. Para o triângulo da figura seguinte tomou-se $p = 0.5$ e representou-se a sucessão de polígonos para diferentes valores de Δp . A linha a azul representa a aproximação de 1.ª ordem, a linha a verde a aproximação de 2.ª ordem e a linha negra o valor exacto.



A aproximação de 1.ª ordem não é muito fiável quando nos afastamos de $\Delta p = 0$, mas o termo de 2.ª ordem mantém-se como boa estimativa do limite para uma larga gama de valores de Δp .

Bibliografia

O tema deste artigo é tratado de forma sucinta no capítulo "Nested Polygons" do livro *Topics in Recreational Mathematics* de J. H. Cadwell (Cambridge University Press). O autor representa os polígonos em séries de Fourier e analisa alguns exemplos simples, concluindo sobre figuras-limite e semelhança entre iterados na bissecção, dos lados e diagonais, em pentágonos e hexágonos. O método utilizado neste artigo é brevemente referido no final, não sendo no entanto demonstrado qualquer resultado.