por António Machiavelo
[Departamento de Matemática Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]

Sobre a Natureza dos Objectos Matemáticos

Os objectos matemáticos são reais ou são imaginários? São descobertos ou são criados? Têm uma existência independente dos seres humanos ou são meras elaborações mentais destes? São quimeras, fantasias, sombras de um outro mundo, habitantes de um mundo ideal? Mas então como pode a matemática ter tantas aplicações, concretas, reais e extremamente eficazes? Por outro lado, se têm uma existência própria, de que forma existem? Podem ser localizados no espaço e no tempo? De que modo?

1. A grande questão

A natureza dos objectos ou entes matemáticos[1] é um tema de debate que remonta, pelo menos, à Grécia Antiga, sendo desde então fonte de constante perplexidade entre filósofos e matemáticos. A questão central que tem sido debatida, ao longo de milénios, com maior ou menor intensidade, é a seguinte: os objectos, ou entes, matemáticos são reais ou são imaginários? Dito de outro modo, são descobertos ou são criados? Ou ainda, existem na "realidade" ou apenas num "mundo de ideias"?

Há um facto que é particularmente confuso: enquanto alguns objectos matemáticos, como por exemplo os números complexos, parecem ser claramente uma invenção humana, já é muito difícil argumentar que resultados sobre estes, como por exemplo o chamado *teorema fundamental da álgebra*[2], sejam uma criação humana! E isto parece conduzir a uma situação um pouco bizarra: inventamos objectos que depois têm propriedades que são completamente independentes de nós? Como é isto possível?

Enquanto investigador, um matemático parece desempenhar por vezes o papel de um construtor, de métodos ou ferramentas, outras vezes o de um descobridor, de resultados sobre certos objectos mais ou menos abstractos. Na realidade, estas duas funções complementam-se, pois o objectivo da construção de métodos e ferramentas é o de levar a perceber melhor certos objectos e as suas propriedades, assim como o de servir para descobrir outras propriedades mais subtis desses mesmos objectos. Não há qualquer dúvida de que um matemático, enquanto faz matemática, se sente como um descobridor explorando terras incógnitas. Mas, pode perguntar-se, um descobridor de quê? Bem, de resultados sobre... E é precisamente neste ponto que surge uma questão particularmente difícil: sobre exactamente o quê?

Seja lá sobre o que for, seja lá qual for a natureza exacta dos objectos matemáticos, tanto a posição de que estes são reais como a posição de que são criados acarretam sérias dificuldades. Por um lado, quem defende que são reais tem de explicar de que forma o são, pois parece ser evidente que têm uma existência algo imaterial, certamente muito diferente da de um rochedo ou da de um rio. Por outro lado, quem defende que aqueles são criações da nossa mente e da nossa imaginação deve explicar como é então possível a matemática ter tantas, tão incríveis e eficazes aplicações no "mundo real".

Neste artigo é delineado um contexto para uma resposta a este aparente dilema, tendo as reflexões

[1] Por exemplo, os números (naturais, racionais, reais, imaginários, p-ádicos), as figuras geométricas (planas, sólidas, n-dimensionais), as funções, os grupos, as álgebras, os espaços topológicos, as variedades diferenciáveis, os espaços de Hilbert de dimensão infinita.

[2] Que garante que todo o polinómio de coeficientes complexos se factoriza como um produto de polinómios lineares.

que aqui se apresentam[3] sido inicialmente inspiradas pela leitura de quatro obras que tiveram uma enorme influência nas posições filosóficas do autor: *Gödel, Escher, Bach*, de Douglas R. Hofstadter [1], *O Acaso e a Necessidade*, de Jacques Monod [2], *O Macaco Nu*, de Desmond Morris [3], e *Dragões do Éden*, de Carl Sagan [4].

2. Algumas correntes da filosofia da matemática

Há, em filosofia da matemática, vários "ismos" que se referem a várias posições sobre as questões ontológicas (*o que são?*) e epistemológicas (*como os conhecemos?*) colocadas pelos objectos matemáticos. Sendo impossível detalhar aqui todas essas posições e suas *nuances*, limitamo-nos a dar um esboço das principais correntes, fornecendo ao leitor interessado alguns apontadores bibliográficos.

Uma das mais antigas e influentes doutrinas, conhecida por *Platonismo*, por ter sido exposta por Platão em várias das suas obras, consiste na opinião de que os objectos matemáticos existem num mundo mais real e perfeito do que aquele que se apresenta aos nossos sentidos, um mundo "*povoado por entidades (chamadas «Formas» ou «Ideias») que são eternas, imutáveis e, em certo sentido, paradigmáticas para a estrutura e o carácter do nosso mundo*" ([5], secção 1; ver também as secções 2 e 9). Um mundo que, numa perspectiva contemporânea, existiria fora do espaço e do tempo, não sendo nem físico nem mental (ver [6]). Esta é uma posição defendida actualmente por, entre outros, o físico-matemático inglês Roger Penrose (ver pp. 11-23 de [7]) e pelo matemático francês Alain Connes ([8], pp. 30-31) que defende uma espécie de mundo platónico um pouco mais elaborado, a que chama "realidade matemática arcaica" (ver [9], pp. 180-192, sendo o termo introduzido na p. 182) ou "primordial" (ver [10], pp. 6-8). Recentemente, a *Newsletter of the European Mathematical Society* publicou uma série de artigos sobre Platonismo[4], que mostram bem quanto o tema é actual, havendo alguma variedade de posições pró-platónicas e anti-platónicas. É interessante observar uma importante diferença de ênfase: enquanto os antiplatónicos se concentram na rejeição da existência de um mundo sobrenatural e místico como o mundo ideal platónico, ignorando o problema da aplicabilidade da matemática, os pró-platónicos realçam a sua opinião de que os objectos matemáticos e as suas relações são independentes dos seres humanos, ignorando o problema da forma da sua existência.

Numa qualquer introdução à filosofia da matemática é quase obrigatório mencionar as três escolas antiplatónicas nascidas da "crise" dos fundamentos no final do século XIX e início do século XX, nomeadamente: *logicismo*, *formalismo* e *intuicionismo*. Numa descrição sumária e superficial, pode dizer-se que a primeira consistia num projecto[5] de redução da matemática à lógica, de modo que as verdades matemáticas sê-lo-iam apenas devido à sua estrutura lógica interna e não por serem propriedades de uns quaisquer objectos exteriores; a segunda[6] é a posição de que a matemática mais não é do que um jogo de símbolos de acordo com certas regras; a terceira[7], a posição de que a matemática deve ter as suas raízes muito bem alicerçadas na intuição humana e em cuidadosas construções feitas com base nessas intuições, sendo esta ciência não mais do que o estudo dessas construções, que existem apenas após serem (mentalmente) construídas e são assim um produto da mente humana. Há que observar que o principal objectivo dessas escolas era o de fornecer alicerces sólidos para os fundamentos da matemática, e não tanto esclarecer o estatuto ontológico e epistemológico dos seus objectos de estudo. Apesar de os seus sucessos terem sido muito relativos e de estas posições não terem actualmente muitos adeptos, convém salientar que tiveram, todas e de diversas formas, um papel fundamental na criação da Lógica Moderna e de vários dos assuntos que hoje nela desempenham um papel importante, assim como

[3] Versões preliminares foram expostas em vários seminários e conferências – na Universidade do Porto e na Universidade de Coimbra em 1999, num ciclo de palestras promovido pelo Clube Inigma em 2004, no CIBEM em 2005 e na Universidade do Minho em 2006. Quero expressar aqui o meu sincero agradecimento ao actual director da *Gazeta* pelo convite para escrever este artigo, que me deu a oportunidade de elaborar e aqui deixar registadas algumas dessas reflexões.

[4] Devido a restrições de espaço, tiveram de ser retiradas algumas notas e várias indicações bibliográficas. O leitor interessado poderá consultá-las em *http://www.spm.pt/files/outros/bibliografia_completa_artigo_convidado_gaz161.pdf*

[5] Iniciado por Gottlob Frege (1848-1925) e desenvolvido, proeminentemente, por Bertrand Russell (1872-1970).

[6] A que, invariavelmente, se associa o nome de David Hilbert (1862-1943), mas quase sempre de uma forma simplista e caricatural. As ideias de Hilbert, um dos mas notáveis matemáticos de sempre, eram bem mais sofisticadas do que normalmente se descreve. Ver, sobre este assunto, [11].

[7] Iniciada por Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966) e desenvolvida pelo seu aluno Arend Heyting (1898-1980).

contribuíram para a teoria da computação moderna, tendo mesmo desempenhado um papel importante na concepção dos próprios computadores.

Ao longo de todo o século XX surgiram e foram elaboradas diversas propostas de teorias filosóficas da matemática, algumas enraizadas em posições filosóficas bem antigas, com outras roupagens ou com novos aperfeiçoamentos ou adornos. Sem pretender fazer aqui uma lista exaustiva, parece-me que as principais são as seguintes, por ordem alfabética: *conceptualismo*[8] – os objectos matemáticos, como todos os *universais*, não são mais do que conceitos mentais, não tendo qualquer substância ou realidade externa; *construtivismo* – um objecto matemático existe apenas quando há um processo de, de algum modo, o construir, havendo várias formas de construtivismo: o *intuicionismo* de Brouwer, já referido; o *finitismo* de Hilbert e Bernays; o *construtivismo recursivo* de Markov; o programa de análise construtiva de Bishop; o *construtivismo social* – o conhecimento científico é uma construção social, sendo criado por relações e interacções sociais; o *construtivismo radical* – o conhecimento é meramente um processo de auto-organização cognitiva do cérebro humano e, sendo assim uma construção, é impossível saber o quanto reflecte uma realidade ontológica; *estruturalismo* – a matemática trata, não de colecções de "objectos matemáticos", mas sim de padrões ou estruturas, sendo os objectos "lugares" nessas estruturas; *ficcionalismo* – as teorias matemáticas são histórias de ficção, exactamente como novelas ou contos de fadas; *humanismo* – uma forma de conceptualismo social-cultural-histórico centrado nos seres humanos, no qual se defende que os objectos matemáticos são criados ou inventados pelos humanos, não de uma forma arbitrária, mas dependendo de necessidades da "vida", estando sujeitos a condicionalismos históricos e, uma vez criados, os objectos matemáticos tornar-se-iam parte da cultura humana, ganhando uma existência independente do seu criador ou inventor e tendo então propriedades bem determinadas que podemos ou não descobrir; *naturalismo* – o ponto de vista filosófico segundo o qual tudo tem causas naturais; *nominalismo*[9] – os universais e abstracções, em particular os objectos matemáticos, não passam de nomes sem qualquer correspondência real: apenas os objectos particulares existem e o que há de comum a objectos distintos (*lisos*, por exemplo) é simplesmente o nome (*liso*) que designa algo de comum e nada mais ("*liso*" é algo que não tem existência por si só); *quasi-empirismo* – o conhecimento matemático é algo semelhante ao conhecimento empírico, no sentido de o critério de verdade em matemática ser, como em física, o sucesso prático das ideias, sendo o conhecimento matemático susceptível de correcção e não-absoluto.

Para mais detalhes e argumentos pró e contra estas diversas posições, ver as notas e referências contidas em *http://www.spm.pt/files/outros/bibliografia_completa_artigo_convidado_gaz161.pdf*. Mas fica o leitor avisado de que algumas discussões neste campo fazem lembrar anjos em cabeças de alfinetes e que, como escreveu Marvin Greenberg em [12] (p.245), "*a filosofia da matemática está num estado de total confusão.*"

Todas as posições referidas podem ser pensadas como diferentes gradações num espectro *realismo* – *idealismo*, onde *realista* é um adjectivo que se aplica, neste contexto, a uma posição na qual se defende que os objectos de conhecimento são de alguma forma independentes da actividade da mente, enquanto *idealista* se aplica aqui a posições centradas na defesa de que toda, ou uma grande parte, da existência desses mesmos objectos é exclusivamente mental[10].

A posição mais radicalmente idealista que se pode ter é denominada *solipsismo*. É a posição de que apenas o leitor que lê estas palavras existe, e absolutamente nada mais, sendo tudo o resto ilusões mentais. Em [13] (p. 302), Bertrand Russell escreve: "*recebi uma vez uma carta de um filósofo que professava ser solipsista mas que estava surpreendido por não haver outros! [...] Isto mostra que o solipsismo não é realmente acreditado mesmo por aqueles que pensam estar convencidos da sua verdade.*" O solipsismo é normalmente apresentado como exemplo de uma teoria irrefutável (como provar que tudo não é uma ilusão da mente?), mas completamente infrutífera,

[8] De facto, uma posição filosófica sobre o estatuto dos *universais* e não propriamente uma filosofia da matemática. Um *universal* é uma propriedade ou relação comum a vários objectos particulares. O *problema dos universais* é a questão de saber se são descobertos ou criados, se existem ou não, e de que forma.

[9] Aplica-se aqui a mesma observação que foi feita na nota de rodapé anterior.

[10] Dada a versatilidade das palavras e as relações afectivas que, de um ou outro modo, todos nós temos com alguns conceitos, é capaz de ser útil mencionar que, no presente contexto, "realista" não tem qualquer relação com reis e rainhas, e que "idealista" nada tem aqui a ver com a defesa de nobres e importantes ideais. Fica a chamada de atenção para a necessidade de se tentar perceber muito bem o significado que se pretende dar aqui, como em outros sítios, às palavras que vão sendo usadas.

pois nada explica. Percebe-se assim que não chega elaborar teorias coerentes e irrefutáveis: é necessário que tenham poder explanatório!

3. O "milagre" das aplicações

Um dos problemas centrais em filosofia da matemática é o de explicar o que foi descrito pelo físico Eugene Wigner[11] como a "eficácia irrazoável da matemática nas ciências naturais". São vários os exemplos dessa eficácia, desde a previsão de eclipses a viagens à Lua. Outros exemplos notáveis são: as propriedades das secções cónicas estudadas por matemáticos da Grécia Antiga, a título de curiosidade intelectual, desempenharam um papel fundamental, mais de dois mil anos depois, na descoberta das leis que regem os movimentos dos planetas, por Johannes Kepler (1571-1630) a partir das observações metódicas de Tycho Brahe (1546-1601); a previsão, em 1846, da existência de um planeta, Neptuno, feita por Urbain Le Verrier (1811-1877), usando apenas matemática e dados de observações do planeta Urano, sendo atribuído a François Arago (1786-1853) o dito de que Le Verrier "descobriu um planeta com a ponta da sua caneta!"; a descoberta matemática por James Clerk Maxwell (1831-1879), "no papel", cerca de 1864, das ondas electromagnéticas, cuja existência é experimentalmente demonstrada mais de duas décadas depois, por Heinrich Hertz (1857-1894); a descoberta, em 1900, do "lado" quântico do mundo atómico, por Max Planck[12] (1858-1947), que foi literalmente forçado pela matemática a aceitar certas interpretações físicas que lhe desagradavam fortemente; a geometria Riemanniana "criada" por Bernhard Riemann (1826-1866), por volta de 1854, inspirada em trabalhos de Gauss (1777-1855), e posteriormente elaborada por Beltrami (1835-1900), Christoffel (1829-1900), Lipschitz (1852-1903), Ricci (1853-1925) e Levi-Civita (1873-1941), que iria desempenhar, mais de meio século depois, um papel crucial na teoria da relatividade geral de Albert Einstein[13] (1879-1955); a previsão da existência de antimatéria por Paul Dirac[14] (1902-1984), em 1928, tendo sido a existência do positrão, a antipartícula correspondente ao electrão, comprovada experimentalmente quatro anos mais tarde; o uso de espaços de Hilbert complexos de dimensão infinita em mecânica quântica, uma das teorias físicas mais bem-sucedidas, com previsões que coincidem com medições experimentais com uma precisão quase inacreditável.

Estes exemplos mostram também que matemática "criada" ou "descoberta" num contexto muitas vezes (aparentemente) desligado da "realidade" é usada décadas, séculos ou mesmo milénios mais tarde, na explicação e na previsão de fenómenos concretos e reais. Isto coloca sérias dificuldades a todas as posições filosóficas que encaram a matemática como um fenómeno meramente mental.

O físico francês Bernard D'Espagnat escreve, em [14] (pp. 36-37), que uma das razões para a matemática ter sido desde o início um agente unificador da física é que "*a matemática não é somente uma linguagem cómoda, na realidade representa uma linguagem mais um raciocínio*". E que "*a matemática é insubstituível*" no sentido em que o seu desconhecimento impede "*o passar de uma descrição, instrutiva neste ou naquele caso, a uma descrição diferente e mais esclarecedora em determinados outros casos*", dando como exemplo a necessidade da matemática para "ver" que a lei clássica, dita lei de Snell–Descartes, de refracção da luz, que dá o desvio angular sofrido por um raio de luz ao passar de um meio para outro, é perfeitamente equivalente ao princípio de Fermat, que estipula que o caminho percorrido por um raio de luz entre dois pontos é aquele que minimiza o tempo percorrido. E acrescenta que "*todos os fenómenos naturais estão fortemente inter-relacionados: a dificuldade de mudar de ponto de vista traduz-se, na prática, numa incapacidade de juntar os elos profundos que unem fenómenos tão diversos da natureza, constituindo-se, portanto, um obstáculo a uma verdadeira compreensão global.*" A matemática é assim algo que captura esses elos profundos.

Observe-se que os exemplos acima enumerados mostram algo mais, algo que quero aqui sublinhar muito bem: **a matemática é mais do que um instrumento de descrição do real – é uma ferramenta para a descoberta do real ainda desconhecido!** O exemplo disto que me parece um dos mais flagrantes é o da descoberta por Maxwell de todo o espectro de ondas electromagnéticas. Como descobrir de outro modo, que não "teoricamente", a existência de ondas, como as de rádio, que não são detectadas por nenhum dos nossos cinco sentidos? Heinrich

[11] Recipiente do Prémio Nobel da Física em 1963.
[12] Prémio Nobel da Física em 1918.
[13] Prémio Nobel da Física em 1921.
[14] Prémio Nobel da Física em 1933.

Hertz, o primeiro a demonstrar experimentalmente a existência dessas mesmas ondas electromagnéticas, escreveu:

"Não se consegue evitar a sensação de que estas fórmulas matemáticas têm uma existência independente e uma inteligência própria, que são mais sábias do que nós, mesmo mais sábias do que os seus descobridores, que delas retiramos mais do que originalmente nelas colocamos."

Por tudo o que se expôs, parece-me inegável que a matemática lida com coisas bem reais e que não pode simplesmente ser uma construção humana. Uma posição idealista relativa à natureza dos objectos matemáticos inevitavelmente esbarra no problema de explicar este enigma da aplicabilidade da matemática. Na realidade, todas as defesas que conheço de uma concepção idealista dos objectos matemáticos ou ignoram este problema ou o menosprezam, dando explicações completamente insatisfatórias, ou então confessam-se incapazes de o explicar. Mas o problema é ainda mais complicado do que normalmente é descrito, pois, como exemplificado acima, a matemática não só fornece instrumentos para explicar, de um modo unificado, variadíssimos fenómenos, como dá ainda a capacidade de sonhar sobre coisas reais que são ainda desconhecidas. Como é isto possível?

4. Uma perspectiva Darwiniana

Antes de mais, é necessário esclarecer que a posição que defendo parte dos dois postulados seguintes:

- Há uma "realidade" exterior aos seres humanos, a "Natureza"[15].

- Tudo, incluindo os seres humanos, é inteiramente natural, sem qualquer componente "sobrenatural"[16].

Por "postulado" entendo aqui um ponto de partida que não pode ser demonstrado, mas para o qual há fortes indícios de ser verdadeiro. De facto, mais de dois mil e quinhentos anos de história da ciência têm sugerido, com uma crescente acumulação de evidências, a veracidade daquilo que acima é postulado. Como observou Stephen Jay Gould (1941-2002): *"As mais importantes revoluções científicas incluíram, sem excepção, o destronar da arrogância humana de pedestal após pedestal de convicções prévias acerca da nossa centralidade no cosmos."* Mais ainda, não há exemplo de nenhuma posição que tenha partido de pressupostos que contradigam estes postulados e que tenha enriquecido, a partir desses pressupostos, o nosso conhecimento efectivo do cosmos, incluindo conhecimento sobre o ser humano (que é uma parte desse cosmos!).

Há uma dessas revoluções que, apesar de ter já século e meio, continua aparentemente a ser de difícil digestão: o mecanismo de "selecção natural e descendência com modificação lenta", a descoberta seminal feita por Charles Darwin (1809-1882). A "teoria da evolução", como é comummente conhecida[17], é uma das teorias científicas mais bem comprovadas, tendo um enorme poder explanatório, que tornou inteligível uma enorme quantidade de dados e observações sobre os organismos vivos previamente dispersos e confusos, assim como fomentou, e continua a fomentar, pesquisas extremamente frutíferas em várias áreas da biologia.

No entanto, abundam ainda muitas ideias distorcidas ou mesmo **completamente erradas** sobre a teoria da evolução, nomeadamente[18]: que implica uma ascensão contínua de animais "inferiores" a animais "superiores"; que a vida evoluiu ao acaso; que há uma "intenção" implícita da selecção natural; que a teoria justifica comportamentos avarentos, imorais ou "animalescos"; que justifica a "lei do mais forte". Estas e outras razões, que se prendem com a remoção do ser humano de um lugar central entre os seres vivos, levam a certas recusas emocionais, conscientes ou inconscientes, das consequências profundas, "**transcendentalmente democráticas**"[19], da teoria da evolução. Um exemplo disto, relevante para o assunto deste artigo, é a seguinte passagem

[15] Que poderíamos designar por $\mathbb{N}$, em homenagem aos Pitagóricos!

[16] Em particular, todas as componentes de um ser humano estão contidas em $\mathbb{N}$ ☺

[17] Apesar de Darwin não ter usado o termo "evolução", por boas razões, pois dá a ideia **errada** de haver um "progresso".

[18] Ver [15] e *http://evolution.berkeley.edu*. Parece haver alguma dificuldade em distinguir entre o acaso das mutações e o mecanismo de selecção natural, que é tudo menos caótico, assim como perceber que "apto", no sentido de adaptado ao meio ambiente, pouco tem a ver, em geral, com "mais forte", não sendo nada óbvio, a não ser *a posteriori*, que características tornam um animal "apto". Mesmo um cientista brilhante como Jacques Monod, galardoado com o Prémio Nobel em Fisiologia ou Medicina em 1965, escreveu alguns sérios disparates sobre este assunto num livro pelo qual tenho (globalmente) uma enorme admiração, [2]: ver pp. 143-144.

[19] Ver [16], p. 67.

de [7][20] (p. 19), na qual Roger Penrose deixa claro por que prefere o platonismo:

"Como me sinto, realmente, acerca da possibilidade de todas as minhas acções, e as de todos os meus amigos, serem em última análise governadas por princípios matemáticos deste tipo? Eu preferiria ter estas acções controladas por algo que habita algum aspecto do fabuloso mundo matemático de Platão do que as ter sujeitas ao tipo de razões básicas e simplistas, tais como procura de prazer, avareza individual ou violência agressiva que muitos argumentam ser as implicações de um ponto de vista estritamente científico."

Penrose demonstra assim os seus preconceitos e alguma falta de reflexão relativamente à teoria da evolução[21]. Não admira que escreva um pouco mais adiante (pp. 20-21):

"[…] continua a ser um profundo quebra-cabeças perceber por que razão as leis matemáticas se aplicam ao mundo com uma precisão tão fenomenal."

Ora, numa perspectiva Darwiniana este mistério começa a esfumar-se, pois, como Carl Sagan explicou em [4], pp. 232-233:

"[...] podemos imaginar um universo no qual as leis da natureza são imensamente mais complexas. Mas nós não vivemos num tal universo. Porque não? Penso que talvez tal se deva ao facto de todos os organismos que apreendiam o seu universo como muito complexo estarem mortos. Os nossos antepassados arborícolas que tinham dificuldade em calcular as suas trajectórias quando saltavam de uma árvore para outra não deixaram muita descendência[22]. A selecção natural serviu como uma espécie de crivo intelectual, produzindo cérebros e inteligências cada vez mais competentes para lidar com as leis da natureza. Esta ressonância, extraída por selecção natural, entre os nossos cérebros e o universo pode ajudar a explicar o enigma descrito por Einstein: a propriedade mais incompreensível do universo, disse, é que seja tão compreensível."

Sempre achei curioso o facto de as pessoas se espantarem tanto com os ajustes delicados e extraordinários entre algumas características de alguns animais e o seu meio ambiente, e não repararem que o mesmo se aplica ao animal humano, assumindo, explícita ou implicitamente, haver uma estranha separação entre as nossas faculdades mentais e a natureza, separando o mental do material de um modo irreconciliável. Ora, a mente é o produto de milhões de anos de selecção natural e faz parte tanto da natureza como de outra coisa qualquer. Contém extraordinárias adaptações dos humanos ao seu meio ambiente, entre as quais a capacidade de abstrair padrões e organizar informação.

5. Problemas de perspectiva

Antes de descrever a minha opinião sobre a natureza dos objectos matemáticos, é necessário introduzir algumas distinções importantes.

5.1 Representação e representado

Na nossa espécie, o uso de símbolos é tão comum que é por vezes difícil separar a **representação** de algo daquilo que por ela é **representado**[23]. Por exemplo, uma coisa é o símbolo "6" e algo totalmente distinto é o que ele representa. O número 6 tem representações distintas em várias línguas (ver figura 1), mas aquilo que é representado, o número em si, é a mesma "entidade". E o que é essa "entidade"? Uma quantidade, poder-se-á responder. Mas o que é uma quantidade? E, em particular, qual a quantidade representada por "6"?

٦ VI 六 陸 ௬ ๖ ༦

Figura 1: Numerais para o número seis, em árabe, latim, chinês simplificado, chinês tradicional, tâmil, tailandês e tibetano (respectivamente).

Estas questões poderão originar alguma confusão, usualmente não se vislumbrando uma resposta que não seja circular. Isto acontece justamente porque abstraímos com tanta facilidade que nem nos apercebemos do que estamos a abstrair! Um exemplo simples poderá ajudar a esclarecer este ponto.

[20] Que não deixa por isso de ser um excelente livro, um autêntico "*tour de force*"!

[21] O que é corroborado na página seguinte (p. 22), em que mostra não entender as bases evolutivas da moral, quando afirma: "*A moralidade tem uma profunda ligação com o mundo mental, uma vez que está tão intimamente ligada aos valores atribuídos por seres conscientes e, mais importante ainda, à presença da própria consciência. É difícil ver o que a moral significaria na ausência de seres conscientes*". Ver sobre este assunto [17,18] e o próprio Darwin, em [19], capítulos 3, 4, e 5.

[22] Isto é obviamente um exemplo caricatural.

[23] Esta confusão é eloquentemente ilustrada num quadro do pintor belga René Magritte (1898-1967), intitulado "A Traição das Imagens" (ver *http://en.wikipedia.org/wiki/The_Treachery_of_Images*), que contém a representação de um cachimbo juntamente com a frase "isto não é um cachimbo", o que é inteiramente verdade: não há nenhum cachimbo na figura, apenas uma sua representação!

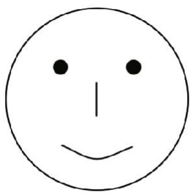

Figura 2: O que é isto?

Toda a gente reconhece na figura 2 uma face humana. No entanto, as faces humanas são tridimensionais, muito mais complexas, não havendo nenhum ser humano específico que esteja aí representado. Por que razão vemos, então, nela uma face? Porque representa (abstractamente) um número de características comuns às faces humanas que é suficiente para as caracterizar[24]. E porque, espero tê-lo demonstrado com este simples exemplo, os humanos abstraem tão facilmente quanto os peixes nadam ou as aves voam.

O que representa então o símbolo "6"? Representa algo que é comum a todos os conjuntos de coisas com seis elementos, ou seja a sua quantidade específica. Isto parece circular, mas não o é. Esta aparência de circularidade resulta de termos de usar as palavras que capturam esse conceito para o descrever, não podendo aqui arranjar-se uma alternativa fácil. Se quisermos, podemos tentar uma explicação um pouco mais sofisticada dizendo que dois agrupamentos de objectos têm a mesma "quantidade" se puderem ser emparelhados, ou mais sofisticadamente ainda, se existir uma bijecção entre esses dois agrupamentos. E o 6 é o nome de uma dessas "quantidades", aquela que segue o 5. A dificuldade advém aqui de a noção de quantidade ser bastante abstracta e, ao mesmo tempo, simples, no sentido de ser irredutível a outros conceitos. Espero, no entanto, que esteja agora clara a diferença entre o numeral 6 e o número que ele representa. De toda esta discussão quero também registar aqui o facto de a noção de número advir de *relações*, de algo em comum entre objectos.

5.2 Camadas e níveis

É também importante estar consciente de que as coisas têm em geral várias camadas, ou níveis, que podem ter características bem distintas. É frequente em discussões, filosóficas ou outras, haver desacordo entre os arguentes sem que estes reparem que estão a centrar o seu discurso em níveis distintos, aos quais dão mais relevância, por um ou outro motivo, tendo ambos razão no que dizem, embora afirmem coisas contraditórias! Isto mostra a necessidade de deixar claro o contexto do que se diz, o que nem sempre é fácil, podendo mesmo ser extremamente difícil em situações um pouco complexas. Aliás, tenho a impressão de que quanto mais interessante é uma situação, mais difícil é distinguir esses mesmos contextos.

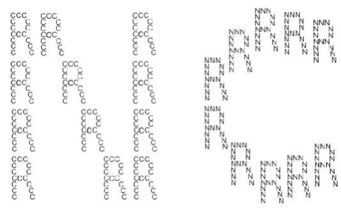

Figura 3: Níveis

A figura 3 pretende dar exemplo de algo cujos "níveis" são bem distintos[25]. Diferentes leitores poderão descrever essas figuras como um *N* e um *C*, outros como conjuntos de *R*s, outros ainda como um conjunto de *C*s, à esquerda e um conjunto de *N*s à direita. Todos têm razão! Uma descrição mais cuidada deveria incluir o nível de que se fala, enquanto uma descrição completa deveria incluir descrições a todos os níveis. Mas isto pode não ser fácil descortinar. Imagine-se que, no exemplo acima, cada um dos pequenos *C*s da figura do lado esquerdo, quando visto ao microscópio, era como o *C* da figura à direita, e que cada um dos *N*s da direita tinha a estrutura do *N* da esquerda...

5.3 A noção de "objecto"

Finalmente, é ainda necessário clarificar o que se entende por "objectos matemáticos". Há aqui uma dificuldade séria, pois o próprio conceito de "objecto" é já por si de difícil delimitação, facilmente admitindo extensões de significado a "objectos" um pouco mais gerais, extensões essas muito úteis em diversos contextos. Além de que tem, como quase todas as palavras, uma multiplicidade de significados. Objecto tanto pode significar "*o que afecta os sentidos*", como uma "*coisa material*", ou "*o que ocupa o espírito*", ou

[24] Não há nenhum outro animal com uma face tão redonda e que sorria movendo os lábios do modo esquematizado na figura...
[25] Cf. "*Prelude...*" e "*... Ant Fugue*" em [1], pp. 275-284 e 310-336.
[26] Que *N* seja a primeira letra de naturalismo, *R* seja a primeira letra de realismo e *C* seja a primeira letra de construtivismo não é aqui coincidência...

ainda "*o que pode ser pensado, por oposição ao ser pensante ou sujeito*".

Mesmo a tentativa de restringir a noção de "objecto" a algo que é "físico" esbarra imediatamente em alguns problemas: e as ondas electromagnéticas? E a gravidade? Bem, não vou aqui precisar o sentido em que uso a palavra "objecto", pois isso restringiria a sua utilidade e implicaria a introdução de várias palavras ou adjectivações adicionais. Limito-me a dar exemplos e a deixar o leitor fazer o que nós, seres humanos, fazemos melhor: abstrair deles os significados pretendidos. Começo, assim, por observar que a gravidade deva talvez se vista como uma relação entre objectos com massa.

Tomemos de seguida como exemplo de "objecto" o próprio leitor, considerado como objecto físico (no sentido comum destes termos, para já) e consideremos alguns níveis a que podemos descrevê-lo (ver figura 4): para um médico, o leitor é um conjunto de órgãos e suas inter-relações (chamo aqui a atenção para a importância destas inter-relações: rearranjemos os órgãos de um outro modo e o resultado é dramaticamente diferente!); para um biólogo, o leitor poderá ser visto como um conjunto de células e suas (importantíssimas) inter-relações; para um físico, o leitor é um conjunto de átomos e suas (imprescindíveis) inter-relações.

$$\boxed{\text{leitor}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{conjunto de órgãos e suas inter-relações}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{conjunto de células e suas inter-relações}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{conjunto de células e suas inter-relações}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\textit{? entidade matemática ?}}$$

Figura 4: O que é realmente um objecto?

Mas, coisa curiosa, segundo Werner Heisenberg[27] (1901-1976), as partículas elementares são "formas matemáticas" e, em geral:

"*A "coisa-em-si" é para o físico atómico, admitindo que ele alguma vez use o conceito, em última análise, uma estrutura matemática.*"

Esta ideia é realçada pelo físico Bernard D'Espagnat, no artigo já acima referido: "*para além das funções já descritas, a matemática assume uma outra, cuja importância vai aumentando. Cada vez mais, com efeito, as matemáticas* **servem para definir os próprios conceitos que se procuram pôr em correspondência com os fenómenos observados**."

Chegamos assim a um resultado deveras curioso (ver fig. 5). Para tentar perceber o que é um objecto matemático, para determinar se este é ou não real, parece natural procurar saber primeiro o que é um "objecto real". Ora, quando analisamos esta questão com alguma profundidade, somos conduzidos à conclusão de que um objecto real é, em última análise, um objecto matemático! Isto mostra o quão subtil é a noção de objecto! E também sugere que os objectos matemáticos poderão afinal não ser assim tão mais peculiarmente estranhos do que outros tipos de objectos, mesmo os mais comuns.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Objecto Matemático ?}} \arrow[d, bend right] \\
\boxed{\text{Objecto Real ?}} \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

Figura 5: Um ciclo estranho

Para complicar ainda mais as coisas, sabia o leitor que é um conjunto de átomos variável com o tempo? Num discurso proferido num encontro da Academia das Ciências dos Estados Unidos, em 1955, Richard Feynman[28] (1918-1988) observou:

"*[...] os átomos que estão no cérebro vão sendo substituídos: os que lá estavam antes já lá não estão.*

Assim, o que é esta nossa mente: o que são estes átomos com consciência? Na semana passada eram batatas! Agora conseguem relembrar o que se passava na minha mente há um ano – uma mente que foi há muito substituída.

Note-se que aquilo a que chamo a minha individualidade é apenas um padrão ou dança [...]. Os átomos entram no meu cérebro, dançam uma dança e depois vão-se embora – há sempre novos átomos, mas sempre dançando a mesma dança, relembrando como era a dança no dia anterior."

Ou seja, somos muito mais parecidos com um rio do que com uma pedra...

6. Conclusão

Qual é então a natureza dos objectos matemáticos? A pergunta deve ser, de facto, reformulada do seguinte modo: o que é que representam os objectos

[27] Prémio Nobel da Física em 1932.
[28] Prémio Nobel da Física em 1965.

matemáticos? A resposta é sugerida pelos próprios números naturais: relações! Relações entre objectos físicos (i.e., numa primeira aproximação, detectáveis pelos nossos sentidos) e outras mais profundas, que não são menos reais do que esses mesmos objectos "físicos"! A matemática captura e estuda relações e inter-relações entre relações, e relações entre estas inter-relações, e por aí fora, até onde chegar o engenho e a sagacidade humanos. Por a visão e o tacto dominarem os nossos sentidos (em muitos contextos usamos "ver" como sinónimo de "perceber") e o que vemos serem os objectos físicos, e não (directamente) as suas inter-relações e interdependências profundas e por vezes subtis, os objectos de estudo da matemática são assim invisíveis. Mas o nosso cérebro é um poderoso guia que, refinado por éons de selecção natural, nos permite aperceber regularidades recônditas na Natureza e desse modo expandir o nosso conhecimento do ambiente circundante (figura 6). As vantagens evolutivas são óbvias.

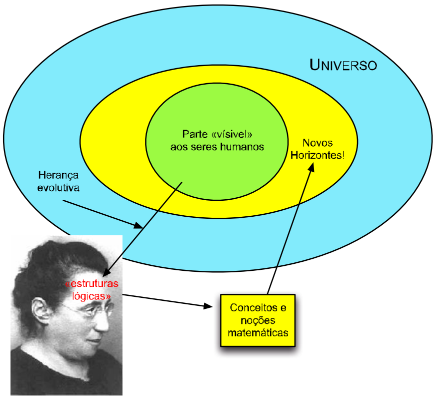

Figura 6: O Universo, os Humanos e a Matemática

Todas as escolas de pensamento em filosofia da matemática me parecem contribuir com análises válidas sobre a matemática, os seus objectos e a sua *praxis*, só que concentrando-se em diferentes níveis, em aspectos diferentes ou partes distintas, cometendo-se depois o erro de misturar alhos com bugalhos. Por exemplo, é claro que os matemáticos **ℂriam** representações, mas para **descobrirem** ℝesultados sobre o que é representado por essas representações. A matemática tem, assim, um lado construtivista e um outro naturalista, obviamente enraizado em algo empírico, um lado formalista e um lado intuicionista, estando essas suas múltiplas "faces" profundamente interligadas.

Contribuindo para aumentar ainda mais a confusão, os matemáticos têm um hábito curioso: criam representações, que depois se tornam elas próprias objecto de estudo. São como biólogos que tenham inventado um novo tipo de microscópio para estudar seres vivos e depois se ponham a estudar esses microscópios. Em matemática isto tem mostrado ser muito útil! Em minha opinião, o corpo $\mathbb{R}$, por exemplo, não é mais do que um instrumento análogo a um microscópio (ou será um telescópio?), que serve para estudar outros objectos matemáticos, mas que é simultaneamente um objecto de estudo[29].

Em conclusão, não tenho qualquer dúvida de que a matemática corresponde, em última análise, a algo de **R**eal, a que acedemos através da nossa **I**ntuição, que beneficia das adaptações evolutivas da nossa espécie e que ajuda a **C**onstruir instrumentos e a desenvolver noções, usando simbioticamente a **E**xperiência e a **R**azão, que são destiladas em **C**onceitos que permitem **A**vançar na exploração da **R**ealidade. E esse "algo de real" é a própria textura do cosmos que corresponde a leis profundas que regem as mais diversas inter-relações entre "objectos".

A posição que defendo poderia chamar-se *Pitagorismo Darwiniano*, mas, pelo que acaba de ser dito, prefiro dar-lhe o nome de[30]:

Realismo **I**ntuitivo–**C**onceptualista **E**mpírico–**R**acionalista **C**onstrutivista **A**nti–**R**adical! M

[29] A descoberta das geometrias não-Euclidianas é frequentemente usada para retirar ilações filosóficas anti-realistas sobre a matemática (cf. [20], pp. 1032-1036). Uma análise cuidada revela, no entanto, a falta de fundamento dessas ilações. Por exemplo, cada uma dessas geometrias pode ser representada "dentro" das outras, o que mostra que não são tão incompatíveis quanto aparentam à primeira vista. São apenas instrumentos distintos que capturam padrões e relações subtis de diferentes aspectos da realidade. É uma situação análoga a algo bem conhecido em Teoria dos Números, onde cada um dos anéis $\mathbb{Z}_n$ contém informações distintas, mas igualmente relevantes, sobre o anel $\mathbb{Z}$, facto muito útil na resolução de equações diofantinas.

[30] Em humilde homenagem ao maior compositor de sempre: Johann Sebastian Bach (1685-1750) (ver [1], pp. 3-8).

Referências

[1] **Hofstadter, Douglas** (1978). *Gödel, Escher and Bach: an Eternal Golden Braid,* Basic Books.

[2] **Monod, Jacques** (1977). *O Acaso e a Necessidade,* Europa-América.

[3] **Morris, Desmond** (1967). *O Macaco Nu,* Círculo de Leitores (edição não datada; o original é de 1967).

[4] **Sagan, Carl** (1977). *The Dragons of Eden: speculations on the evolution of human intelligence,* Hodder & Stoughton.

[5] **Kraut, Richard** (2008). "Plato", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), *http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/plato*, Fall 2008 edition.

[6] **Balaguer, Mark** (2009). "Platonism in Metaphysics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), *http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/platonism*, Summer 2009 edition.

[7] **Penrose, Roger** (2005). *The Road to Reality: a complete guide to the laws of the universe,* Vintage Books.

[8] **Goldstein, Catherine** e **Skandalis, George** (2008). "An interview with Alain Connes, part II", *Newsletter of the EMS* 67, 29-33.

[9] **Changeaux, Jean-Pierre** e **Connes, Alain** (1995). *Conversations on Mind, Matter and Mathematics,* Princeton University Press.

[10] **Connes, Alain, Lichnerowicz, André, Schützenberger** e **Marcel Paul** (2001). *Triangle of Thoughts,* American Mathematical Society.

[11] **Zach, Richard** (2009). "Hilbert's Program", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), *http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/hilbert-program*, Spring 2009 edition.

[12] **Greenberg, Marvin** (1980). *Euclidean and non-Euclidean Geometry: development and history* (segunda edição*),* Freeman.

[13] **Russell, Bertrand** (1951). *An Outline of Philosophy,* Georg Allen & Unwin (original de 1927).

[14] **D'Espagnat, Bernard** (1993). "Física", em *Enciclopédia Einaudi* (dirigida por Ruggiero Romano), vol. 24, Imprensa Nacional Casa da Moeda.

[15] **Gregory, T. Ryan** (2009). "Understanding Natural Selection: Essential Concepts and Common Misconceptions", *Evolution: Education and Outreach* 2, 156-175.

[16] **Druyan, Ann** e **Sagan, Carl** (1993). *Shadows of Forgotten Ancestors,* Ballantine Books.

[17] **Allen, Colin** e **Bekoff, Marc** (2005). "Animal Play and the Evolution of Morality: an Ethological Approach", *Topoi* 24, 125-135.

[18] **Frank, Robert H.** (1988). *Passions Within Reason: the strategic role of emotions,* W. W. Norton.

[19] **Darwin, Charles** (1882). *The Descent of Man, and selection in relation to sex*, John Murray (segunda edição), disponível em "The Complete Work of Charles Darwin Online", no endereço *http://darwin-online.org.uk*

[20] **Kline, Morris** (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press.