por Roger Picken
[Instituto Superior Técnico]

A Teoria de Nós?

A teoria de nós pretende identificar nós equivalentes e distinguir nós diferentes. É uma área particularmente acessível da topologia, com ligações subtis à física.

Imaginemos que damos uma corda a cada uma de duas pessoas para fazerem um nó. Fazem o nó, juntam as duas pontas de tal forma que não se nota onde está a junção e devolvem-nos as cordas. A nossa tarefa é dizer se os dois nós são equivalentes ou não, ou seja, se podemos deformá-los para ficarem com um aspecto idêntico (sem cortar as cordas, obviamente!) ou se tal objectivo é impossível. Eis a questão central a que a teoria de nós tenta dar resposta. Desta pergunta simples, aparentemente inocente, resultaram ideias matemáticas riquíssimas, que influenciaram bastante muitos desenvolvimentos em geometria e topologia, incluindo as grandes questões relacionadas com a topologia em dimensão 3 e 4, com impacto também em áreas de aplicação, como a física e a bioquímica. Nestes contextos mais abrangentes, um nó tipicamente representa algo bastante mais sofisticado do que uma mera corda.

Nós e enlaces (um enlace é feito de duas ou mais cordas – ver figura 1) surgiram desde cedo em trabalhos de vários matemáticos e físicos, incluindo Vandermonde, Gauss e Maxwell. A abordagem à teoria que usamos hoje em dia começou de forma engraçada. O físico William Thompson (que passou a ser Lord Kelvin), conhecido principalmente pelas suas contribuições na termodinâmica e na teoria de electricidade, tinha concebido um modelo dos átomos que seriam vórtices no éter, inspirado em parte pelos anéis intricados de fumo que o seu colega, Peter Tait, um físico escocês, tinha conseguido produzir. Na esperança de encontrar a tabela periódica dos elementos, Tait construiu uma lista grande de nós, de complexidade cada vez maior, medida em termos do número minimal de cruzamentos numa representação planar do nó, formulando ainda uma série de conjecturas acerca destes diagramas. O modelo de Kelvin revelou-se depois inútil, com a demonstração experimental da inexistência do éter, mas, de qualquer forma, nasceu assim o estudo sistemático dos nós através da análise das suas representações em diagramas.

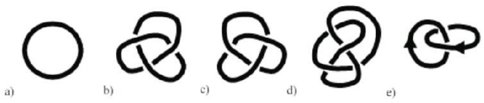

Figura 1: a) nó trivial; b) o trifólio; c) o espelho do trifólio, inequivalente ao trifólio; d) o nó oito (exercício não-trivial: mostrar que é equivalente ao seu espelho); e) o enlace de Hopf, inequivalente a dois nós triviais separados (com setas a indicar uma orientação, uma noção usada adiante).

Os diagramas de nós constituem, de facto, o conceito-chave no teorema fundamental da teoria, o teorema de Reidemeister. Um nó matemático é uma aplicação injectiva e contínua de uma circunferência para o espaço 3-dimensional, onde normalmente se impõe uma condição adicional, por exemplo, que a aplicação seja poligonal ou suave, para evitar certos exemplos patológicos, chamados nós selvagens. Um diagrama de nó é uma projecção de um nó no plano, tal que a projecção é injectiva excepto num número finito de pontos, onde dois pontos do nó são projectados num único ponto de cruzamento

Caderno_3
quarta-feira, 23 de Junho de 2010 15:27:08

transversal no diagrama. Usando uma convenção gráfica óbvia, o diagrama indica qual é a parte do nó que passa por cima e qual a que passa por baixo em cada cruzamento. O teorema de Reidemeister afirma que a equivalência entre dois nós, ou seja, a possibilidade de deformar um no outro, corresponde a uma equivalência entre diagramas de nós, que passa por deformações do diagrama no plano (às vezes chamados movimentos de Reidemeister 0), e três passagens locais entre diagramas que são mesmo diferentes na estrutura dos seus cruzamentos, chamadas movimentos de Reidemeister 1, 2 e 3 (figura 2). Todos os movimentos podem ser executados em ambos os sentidos, portanto, dois nós são equivalentes se, e só se, qualquer diagrama de um deles puder ser obtido de qualquer diagrama do outro, através de uma sequência de deformações planares e movimentos de Reidemeister 1-3.

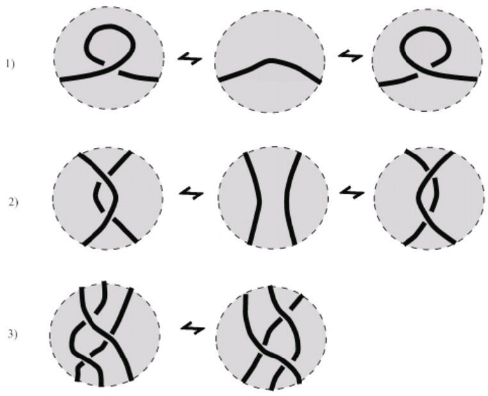

Figura 2: Os três movimentos de Reidemeister. Os movimentos afectam só a região do plano indicada com cor cinzenta, deixando o resto do diagrama inalterado.

Dispomos assim de uma ferramenta poderosa para distinguir entre nós, porque basta encontrar uma grandeza, por exemplo um número, que podemos atribuir a diagramas, tal que seja invariante sob os movimentos de Reidemeister. Se esse invariante tomar um valor diferente em dois diagramas, temos a certeza de que os nós correspondentes são inequivalentes. Um exemplo simples de uma construção deste género passa por colorir os arcos, em que um arco num diagrama de nó é uma linha ininterrupta que começa e termina num cruzamento, onde passa por baixo. Definimos um invariante como sendo o número de maneiras diferentes que existem para colorir os arcos de um diagrama, usando somente três cores, sujeito a termos em cada cruzamento ou três arcos com a mesma cor ou três arcos com três cores diferentes (figura 3). Não é difícil convencer-se de que esse número é realmente invariante sob os movimentos de Reidemeister, e vê-se logo que toma valor 3 para o não-nó, e 9 para o nó trifólio, o que prova o facto, intuitivamente óbvio, de que esses dois nós são inequivalentes. Aliás, existem generalizações bem mais sofisticadas desta abordagem, usando "paletas" de cores algébricas, chamadas *quandles* ou módulos cruzados.

Figura 3: Diagramas de nós com os arcos coloridos.

Podemos ganhar informação acerca do nó considerando o seu complementar, ou seja o espaço obtido do espaço tridimensional R^3, escavando um túnel na forma do nó. Por exemplo, podemos concluir que dois nós são diferentes se o grupo fundamental do seu complementar for diferente (o grupo fundamental de um espaço é um grupo cujos elementos são obtidos de lacetes fechados contidos no espaço (ver "O que é o grupo fundamental", *Gazeta de Matemática* 155, págs. 48/9, por Gustavo Granja). Um diagrama de nós permite caracterizar o grupo fundamental do seu complementar através de geradores e relações – cada arco fornece um gerador e cada cruzamento, uma relação da forma

$$b = c^{-1} a c$$

(note que o grupo fundamental é não-comutativo em geral), onde *c* é o arco que passa por cima no cruzamento (figura 4). Infelizmente, não é uma tarefa fácil dizer quando duas caracterizações deste género correspondem a grupos iguais ou diferentes. Em 1923, Alexander encontrou uma maneira de extrair informação do grupo fundamental do complementar do nó, que não sofria de ambiguidade nenhuma: um polinómio numa variável com coeficientes inteiros. Durante muitos anos, o polinómio de Alexander foi

Caderno_3
quarta-feira, 23 de Junho de 2010 15:27:13

o invariante principal usado pelos matemáticos que estudavam nós. Uma contribuição interessante veio de John Conway, com a introdução de um polinómio equivalente, que satisfaz uma equação, chamada "relação de *skein*", relacionando o polinómio de Alexander-Conway de três diagramas quase idênticos de nós ou enlaces (figura 5). Esta propriedade é muito forte, mas não pode servir como definição do polinómio sem uma prova da sua existência.

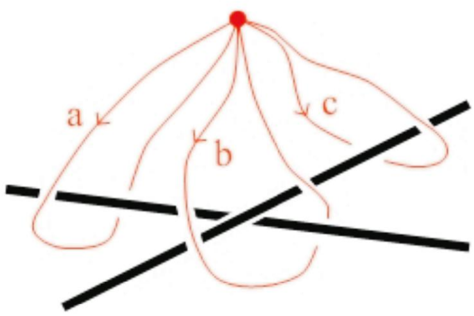

Figura 4: Os geradores do grupo fundamental do complementar, que obedecem à relação $b=c^{-1}\,a\,c$.

Figura 5: A "relação de *skein*" para o polinómio de Alexander-Conway. Os argumentos indicam diagramas que diferem só na região indicada. As setas indicam a orientação. Exercício: sabendo que o nó trivial tem polinómio 1, mostre que o trifólio tem polinómio $1+z^2$, independentemente da escolha de orientação.

Nem o invariante de coloração descrito acima nem o grupo fundamental do complementar do nó conseguem distinguir pares de nós chirais, sendo nós inequivalentes que são a imagem-espelho um do outro, como por exemplo o trifólio e a sua imagem-espelho. Mas em 1983 houve um avanço muito substancial, com a chegada de um novo invariante, o polinómio de Jones, bastante mais poderoso do que o polinómio de Alexander, já conseguindo distinguir pares chirais (embora nem todos). Surpreendentemente, a descoberta veio dos estudos de Vaughan Jones numa área bem diferente, as álgebras de operadores. Nesse contexto ele conseguiu encontrar uma noção de traço para uma representação do grupo das tranças, que tinha as propriedades necessárias para dar um invariante de nós (as tranças são objectos estreitamente relacionados com nós, sendo obtidas de um número fixo de cordas descendentes – ver figura 6). Só depois de ele ter conversado com Joan Birman, especialista na teoria de nós, é que as implicações da construção se tornaram claras (o que mostra a importância da comunicação entre áreas diferentes de especialização!). O polinómio de Jones também satisfaz uma "relação de *skein*", o que ajudou Louis Kauffman a encontrar um polinómio equivalente ao polinómio de Jones. O método de Kauffman consiste na atribuição de pesos a certos diagramas, chamados estados, obtidos do diagrama do nó, resolvendo os cruzamentos de duas maneiras diferentes (figura 7), fazendo no fim uma soma das contribuições de todos os estados.

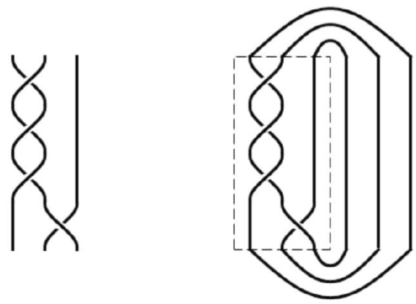

Figura 6: Uma trança com três fios, à esquerda. Depois de fechar a trança como na figura à direita, resulta um nó, o trifólio.

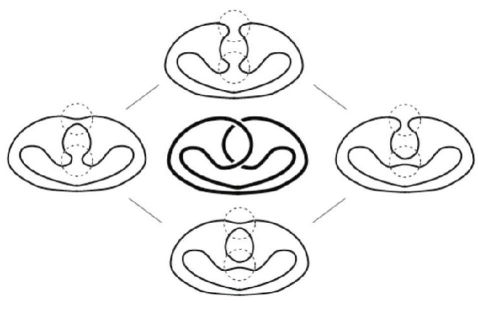

Figura 7: Os quatro estados para o cálculo do polinómio de Kauffman do nó no meio (equivalente ao nó trivial).

Caderno_3
quarta-feira, 23 de Junho de 2010 15:27:17

Depois do polinómio de Jones, houve uma explosão de desenvolvimentos na teoria de nós. Num artigo de 1989, de tremendo impacto, o físico Edward Witten encontrou uma abordagem completamente nova ao polinómio de Jones, através da teoria quântica do campo. A ideia tinha surgido em conversas entre ele e os matemáticos Michael Atiyah e Graeme Segal numa conferência sobre física-matemática (Atiyah usa muitas vezes este episódio para encorajar as pessoas a discutirem entre si em encontros científicos!). Aliás, isto foi só uma das vertentes de um diálogo muito fértil entre a física e a matemática, cujos protagonistas têm sido exactamente Atiyah e Witten. Um aluno de doutoramento de Witten, Dror Bar-Natan, investigou a ligação entre os coeficientes na expansão em série de potências do integral de caminho de Feynman subjacente ao modelo físico e novos invariantes de nós que tinham surgido entretanto, os chamados invariantes de Vassiliev. Estes invariantes resultam da extensão da teoria para incluir também nós singulares, com um número finito de auto-intersecções transversais. Um invariante de Vassiliev é qualquer invariante que obedeça a uma "relação de *skein*", envolvendo os dois tipos de cruzamento e uma auto-intersecção na mesma região dentro de um diagrama de nó singular (figura 8), e que é simultaneamente "de tipo finito", o que significa que se anula para nós com mais de um determinado número finito (mas arbitrário) de auto-intersecções. Porque estas condições traduzem limitações algo fracas ao universo de todos os invariantes de nós, é natural conjecturar que os invariantes de Vassiliev são suficientemente fortes para classificar completamente os nós, mas esta conjectura ainda está em aberto. Convém mencionar que todos os invariantes de Vassiliev de um determinado nó estão contidos num único integral, de grande subtileza e difícil de calcular, o integral de Kontsevich do nó. Aliás, este integral é de certo modo análogo a integrais inventados por Gauss (1777-1855) para determinar invariantes de enlaces, ou seja, vê-se aqui a história a repetir-se.

Figura 8: A "relação de *skein*" para um invariante de Vassiliev.

Para concluir, a última inovação na teoria de nós chama-se "homologia de nós" e foi inventada por Mikhail Khovanov. Seria ir longe demais tentar descrever aqui o que é a homologia, mas é uma teoria que, entre muitos outros invariantes topológicos, dá origem à característica de Euler, que já foi descrita por Lucía Fernández-Suarez na *Gazeta de Matemática* 158, págs. 42/5. Na abordagem de Khovanov, o polinómio de Jones revela-se como sendo meramente a característica de Euler de uma homologia muito mais rica, construída à custa dos diagramas de estados usados por Kauffman, referidos anteriormente. Esta nova visão de Khovanov sobre os invariantes de nós enquadra-se numa tendência na matemática moderna chamada "categorificação", prometendo ter um impacto maior também em áreas mais abrangentes da topologia, da geometria e da álgebra.

Soluções dos exercícios

Exercício na figura 1d): *http://www.popmath.org.uk/exhib/pagesexhib/mirror.html*

Exercício na figura 5: *http://en.wikipedia.org/wiki/Knot_theory*

Agradecimentos a todos os colegas e alunos que partilharam comigo os seus conhecimentos sobre teoria de nós, e uma palavra especial de agradecimento para Isabel Neves, João Faria Martins, Marco Mackaay e Marko Stošić pela leitura cuidada do artigo e comentários.

Referências:

Adams, Colin, (2004). *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, American Mathematical Society.

Rolfsen, Dale, (2003). *Knots and Links*, American Mathematical Society.

Caderno_3
quarta-feira, 23 de Junho de 2010 15:27:21