por **Alexander Kovačec e Amílcar Branquinho**
[Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra]

Construções sem régua

Na escola, a professora propõe o seguinte problema: dados três pontos *A*, *B*, *Q* no plano, indiquem como construir com régua e compasso o pé da perpendicular por *Q* à recta *AB*. O Afonso esqueceu-se da régua em casa. Será que ele pode construir o referido ponto somente com o compasso?

Caro Leitor,
Nesta edição vamos analisar alguns exercícios interessantes que se podem colocar a estudantes e professores de qualquer nível de ensino. Na verdade, este tipo de questões acompanhou a própria evolução da matemática.

A perspectiva que utilizamos nesta exposição é construtiva, pelo que o *"fazer matemática"* vai estar aqui bem presente. Como vantagem adicional temos que as demonstrações se fazem vendo o resultado, sem obviar as questões de existência. Ficará claro que trabalharemos o conceito, indicaremos as ideias fundamentais e definiremos os objectivos a resolver com uma técnica que julgamos ao alcance dos nossos leitores.

Na academia de Platão, como se sabe, todas as construções geométricas tinham de ser feitas com régua e compasso. A investigação do que com eles se pode construir promoveu muito o desenvolvimento de várias áreas da matemática.

No entanto, um milénio e meio mais tarde, o dinamarquês Georg Mohr (1672; trabalho redescoberto em 1928) e, independentemente, o italiano Lorenzo Mascheroni, em 1797, provaram que toda a construção geométrica executável com compasso e régua é executável somente com o compasso.

Uma recta é definida por dois pontos e uma circunferência pelo centro e raio. Na teoria clássica das construções geométricas são-nos dados uma régua e um compasso sem escalas quaisquer e dois pontos. *Construir um novo ponto* significa obtê-lo como:

– Intersecção de duas rectas
ou
– Intersecção de uma recta e uma circunferência
ou ainda
– Intersecção de duas circunferências.

Na teoria das construções sem régua, segundo Mohr e Mascheroni, não podemos traçar nenhuma recta; mas dela são sempre visíveis pelo menos dois pontos. Construir um novo ponto significa obtê-lo como intersecção somente de duas circunferências. Devemos então mostrar como reduzir a construção dos dois primeiros tipos de pontos ao terceiro tipo, i.e. à intersecção de circunferências.

Lema 1. *Dados dois pontos AB, é possível construir um terceiro ponto E tal que B é o ponto médio do segmento* $[AE]$.

Prova. Ver Figura 1. Seja $r=|AB|$. Tracem-se as circunferências $C_1=C(A,r)$, (de centro A e raio r) e $C_2=C(B,r)$. Sejam C,D os pontos de intersecção destas circunferências: $\{C,D\}=C_1\cap C_2$. Então o triângulo $\Delta[ABC]$ é equilátero.

Logo, o arco $C\frown D$ define $2\pi/3$ radianos. Seja $C_3=C(C,|CD|)$. Então define-se por $\{D,E\}=C_3\cap C_2$ um ponto E tal que $C\frown E\subseteq C_3$ define também $2\pi/3$ radianos. Decorre que $A\frown E=A\frown C+C\frown E=\pi/3+2\pi/3=\pi$. Isto significa que A e E são diametralmente opostos a B, e assim obtemos o resultado desejado.

A construção proposta foi feita com vista já posta no lema 2. Se só precisávamos do ponto E, ele podia ser encontrado usando apenas C_2.

Problema 1. Como?

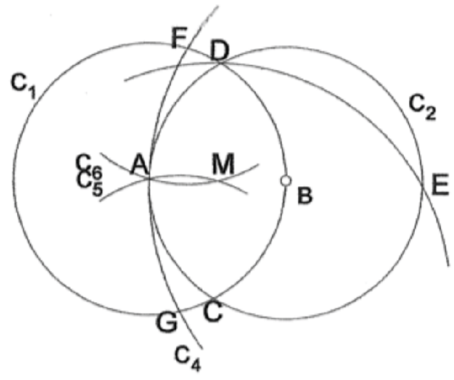

Figura 1

Lema 2. *Dados dois pontos A, B, é possível construir o seu ponto médio M.*

Prova (esboço). Diremos como construir M (cf. Figura 1).

i. Com base na construção do lema 1, trace-se $C_4=C(E, |AE|)$ e defina-se $\{F,G\}=C_1 \cap C_4$.

ii. Tracem-se as duas circunferências simétricas relativamente à recta l_{AB} dadas por $C_5=C(G, |AG|)$ e $C_6=C(F, |AF|)$.

iii. Defina-se $M=(C_5 \cap C_6) \setminus \{A\}$.

Problema 2. Mostrar que M é o ponto médio do segmento $[AB]$.

Lema 3. *Seja l uma recta e $P \notin l$ um ponto. Então, é possível construir:*

i. O ponto P', reflexão do ponto P em l, e

ii. O ponto L, pé da perpendicular por P a l.

Problema 3. Indicar como construir P' e L como intersecções de circunferências, dada a recta l com apenas dois pontos visíveis e assim provar o lema. (As construções são simples.)

Como último preliminar fundamental para entender certas justificações abaixo, lembramos o teorema da corda e o conceito da potência de um ponto relativamente a uma circunferência.

Teorema (da corda). *Considere-se a circunferência $C=C(O,r)$ e um ponto P. Então para qualquer recta l que passa por P e intersecta C nos pontos A e B tem-se que*

$$\mathrm{pot}(P,C):=|OP|^2-r^2=\vec{PA} \cdot \vec{PB},$$

valor que se diz potência de um ponto relativamente à circunferência C.

O produto de vectores que aqui ocorre é o produto escalar; que é igual a $\varepsilon |PA||PB|$ com ε igual a +1 se os vectores têm o mesmo sentido, e -1 se os vectores têm sentidos contrários.

Agora podemos retomar os nossos problemas principais.

Proposição 1. *É possível construir os pontos de intersecção de duas circunferências dadas pelos seus centros e respectivos raios.*

Prova. Aqui nada há a provar.

Proposição 2. *É possível construir a intersecção de uma circunferência C com uma recta l em ambos os casos possíveis:*

i. No caso em que l não passa pelo centro de C.

ii. No caso em que l passa pelo seu centro.

Prova.

i. Fica como exercício para o leitor; para a resolução do caso ii, baseamo-nos nos lemas anteriores e no caso i.

ii. Seja $C=C(O,r)$ uma circunferência e $l=l_{OP}$ uma recta por O e outro ponto P. Definamos ainda $\{X,Y\}=C \cap l$. Os pontos X,Y são então os pontos de momento desconhecidos que queremos construir. Sem perda de generalidade (porquê?) podemos assumir a colinearidade de P,X,Y na ordem P-X-Y.

Proceda-se assim (cf. Figura 2):

1. Escolhe-se um ponto $B \in C$ e determina-se $\{A,B\}=l_{PB} \cap C$= segundo parte i.

2. Por intersecção de dois arcos curtos de igual raio $r'>r$ e centros em A,B determina-se um ponto M com $|MA|=|MB|=r'$, e traça-se uma circunferência, $C_1=C(M, r')$.

3. Escolhe-se um ponto $X' \in C_1$ e constrói-se segundo os lemas 1 e 2, $Y' \in C_1$ tal que $|X'Y'|=2r$ e O'= ponto médio do segmento $[X'Y']$.

Problema 4. Explicar os pormenores.

Trace-se a circunferência $C'=C(O', r)$. Note-se que ela é geometricamente igual a C e $[X'Y']$ é um diâmetro.

4. A recta $l_{X'Y'}$ não passa por M, de modo que por parte *i* da presente proposição podemos determinar a sua intersecção com a circunferência $C_3=C(M,|MP|)$. Desta intersecção escolhe-se aquele ponto P' para o qual se tenha a disposição P'-X'-Y'. Como $|MP|=|MP'|$, os pontos P e P' têm relativamente à circunferência C_1 a mesma potência. Isto significa que $|PX||PY|=|PA||PB|=|P'X'||P'Y'|$. Como $|XY|=|X'Y'|$, decorre daí que $|PY|=|P'Y'|$ e $|PX|=|P'X'|$ e, por conseguinte, $|PO|=|P'O'|$.

5. Definamos $B'=C'\cap C(P',|PB|)$. Então temos, pela igualdade dos raios de C' e C, que $\Delta[PBO]\approx\Delta[P'B'O']$. Assim obtemos $B'\hat{O}'Y'=B\hat{O}Y$, logo os triângulos isósceles com dois lados r cada um, definidos por estes ternos de ponto são congruentes.

6. Por isso obtém-se o desejado ponto Y como um dos dois pontos da intersecção $C(B,|Y'B'|)\cap C$.

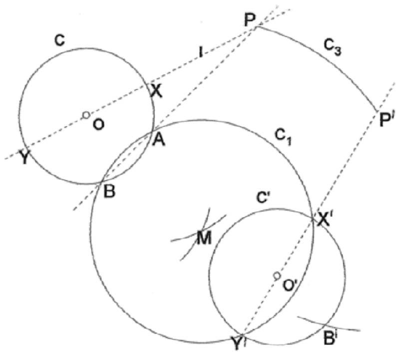

Figura 2

Obtém-se X por procedimento análogo.

Proposição 3. *É possível construir o ponto de intersecção de duas rectas.*

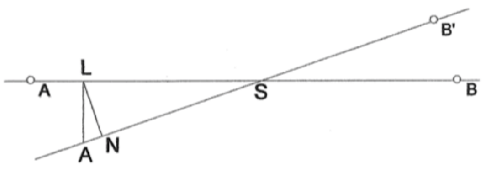

Figura 3

Prova. Ver Figura 3. Sejam A, B os pontos visíveis de uma das rectas, l, e A', B' os da outra l'. Segundo o lema 3.ii, podemos construir L:= pé de A' sobre l, e depois N:=pé de L sobre l'. Juntamente com o ponto desconhecido $S=l\cap l'$ obtemos então triângulos semelhantes $\Delta[LA'N]\approx\Delta[SA'L]$ donde depreendemos $|LA'|:|SA'|=|A'N|:|A'L|$, o que significa $|A'L|^2=|A'N||SA'|$.

Ora visto que conhecemos A', L, N, podemos construir a distância $|SA'|$ à parte usando o teorema das cordas.

Problema 5. Explicite como.

Finalmente, usando a proposição 2 podemos construir S como intersecção da circunferência $C(A', |SA'|)$ com a recta .

As três proposições provadas estabelecem o teorema de Mohr-Mascheroni.

Pode provar-se que é impossível construir somente com régua todos os pontos construtíveis com régua e compasso; no entanto, Steiner e Poncelet mostraram que basta ter uma circunferência fixa no plano e uma régua para construir todos os pontos construtíveis com régua e compasso.

Deixemos ao leitor um último desafio, que é independente da teoria exposta.

Damos–lhe nada mais do que uma régua com escala e um lápis. Supomo-lo capaz de ler a régua, traçar com ela segmentos e fazer cálculos, em qualquer dos casos, com a precisão desejada. Isto é, supomos que todo o número real existe como um ente bem definido (apesar de poder ter, na realidade, uma infinidade de dígitos).

Problema 6. Seja l uma recta e Q um ponto do plano, mostre que podemos traçar por Q uma perpendicular a l; e se $Q\notin l$ uma paralela a l. M

Envie as soluções para:

Projecto Delfos
Departamento de Matemática de FCTUC
Apartado 3008
EC Universidade
3001-454 Coimbra