por **Fabio Chalub**
[Universidade Nova de Lisboa]

Onde calham os primos?

Dizem que, uma vez, um grupo de estudantes se dirigiu a um eminente matemático russo, pedindo ajuda para resolver um somatório de números primos. "Quando será que vão perceber que números primos existem para multiplicar e não para somar?", respondeu-lhes. O que diria então do mais recente teorema no assunto?

Em 1900, um dos maiores matemáticos do século XX, o alemão David Hilbert, numa conferência em Paris, enunciou o que lhe pareciam ser os principais problemas em aberto da matemática. O sétimo problema consistia em demonstrar ou refutar a afirmação de que um número algébrico (isto é, que seja raiz de algum polinómio de coeficientes inteiros) diferente de 0 ou 1, quando elevado a um número irracional (que não pode ser descrito como uma fracção de números inteiros), é transcendente (ou seja, não é algébrico). Em termos mais imediatos, provar, por exemplo, que 2 elevado à raiz quadrada de 2 não é raiz de nenhum polinómio de coeficientes inteiros.

Tal problema foi resolvido no ano de 1934 pelo matemático russo Aleksandr Gelfond (e, independentemente, no mesmo ano por Theodor Schneider). O mesmo Gelfond, um matemático polivalente que actuou em diversas áreas da matemática (e que não é o russo da introdução!), formulou uma curiosa conjectura sobre os números primos: se somássemos os seus dígitos, aqueles cuja soma é par e os cuja soma é ímpar obedeceriam à mesma distribuição estatística. E, mais importante, independentemente da base em que os números fossem escritos.

Começamos pela base 2, aquela em que os números são escritos como sequências de 0s e 1s. Nesta, 10 é 2, 11 é 3, 100 é 4 e assim por diante. O número que, na base 10 – aquela que usamos no nosso dia – chamamos 324 é escrito na base 2 como 101000100, pois $256+64+4=2^8+2^6+2^2$. A soma dos seus dígitos é $3=1+0+1+0+0+0+1+0+0$.

O número mais pequeno com n dígitos é 1 seguido de n-1 zeros, e o maior é uma sequência de n 1s. Excepto para 10 (que equivale a 2), qualquer número da forma 1000... 00 não é primo, pois é uma potência de 2. Assim, o menor número com n dígitos que pode ser primo é dado por 1000... 001, que é o caso de 5, 17, etc. Por outro lado, o maior destes é o 11... 11, como em 3, 7, 31, 127, etc. Desta forma, a soma dos dígitos em base 2 de um primo p, a que chamamos $s_2(p)$ é necessariamente maior ou igual a 2 e menor ou igual a n.

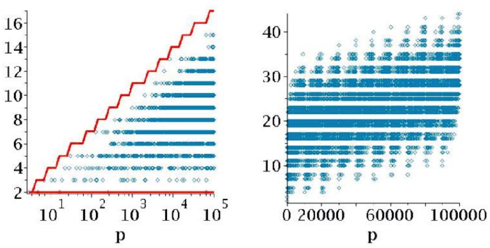

Figura 1: Gráfico da função $s_2(p)$ (esquerda) e $s_{10}(p)$ (direita) em escala semilogarítmica até 100.000. Em vermelho estão marcados os limites inferior e superior da função $s_2(p)$ discutidos no texto. De cada vez que o gráfico encontra a linha vermelha, temos um primo de Mersenne ou de Fermat.

Os primos tais que $s_2(p)=2$ são da forma 2^n+1 e são conhecidos como "primos de Fermat", enquanto aqueles que em base 2 se escrevem 111... 1 são os primos de Mersenne, dados por 2^n-1. Conhecem-se muitos primos de Mersenne, poucos de Fermat (de facto, apenas quatro), no entanto não se sabe se estes conjuntos são finitos ou infinitos. Se forem infinitos, então a função $s_2(p)$ assume uma infinidade de vezes os seus limites superior e inferior, o que mostra o quão complicada ela deve ser.

A conjectura de Gelfond, finalmente demonstrada em 2010 por Mauduit e Rivat [1], dois investigadores em Luminy (Marselha, França), fala sobre a distribuição da função $s_q(p)$, a soma dos dígitos do primo p na base q. Na figura 1 vemos esta função para q igual a 2 e 10.

Vamos estudar os exemplos da base 10 e considerar apenas quando a função $s_{10}(p)$ é par ou ímpar, mas sempre tendo em mente que os resultados demonstrados são muito mais gerais.

Enunciamos o principal resultado do artigo de Mauduit e Rivat: a quantidade de primos menores do que um certo número x tal que a soma dos seus dígitos em base 10 seja par é a metade do número total de primos mais um termo correctivo que se torna menos e menos relevante à medida que x cresce. O mesmo vale para aqueles cuja soma dos dígitos é ímpar. Veja a figura 2, que torna fácil acreditar que as duas funções de contagem são muito semelhantes. Na legenda da mesma figura também dividimos os primos até 100 nos dois casos de interesse.

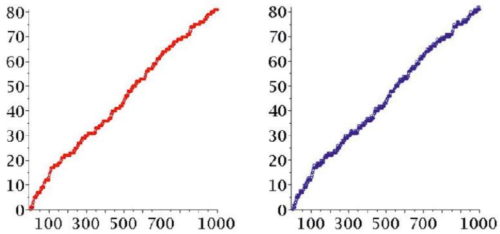

Figura 2: Gráfico da função que indica a quantidade de primos cuja soma dos dígitos em base 10 é par (esquerda) e ímpar (direita) menores ou iguais a x com x entre 2 e 1000. Note a similaridade entre os dois gráficos. Os primos até 100 cuja soma dos dígitos é par são 2, 11, 13, 17, 19, 31, 37, 53, 59, 71, 73, 79 e 97; aqueles cuja soma é ímpar são 3, 5, 7, 23, 29, 41, 43, 47, 61, 67, 83, 89.

Resultados deste tipo, que incluem um termo correctivo que não é determinado explicitamente mas que se sabe menos e menos importante à medida que a variável da função cresce, são conhecidos como assimptóticos. Este tipo de abordagem não é desconhecida de quem se interessa pela distribuição de números primos: Gauss já havia dedicado o seu tempo a este estudo, concluindo que a quantidade de números primos menores ou iguais a um certo valor x é assimptoticamente equivalente a $x/\log x$; o que os dois investigadores fizeram agora é um enorme refinamento do estudo da distribuição estatística dos números primos, que responde a várias questões deixadas em aberto por gerações e gerações de matemáticos. M

Referências

[1] **C. Mauduit e J. Rivat**,"Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers." *Annals of Mathematics*, Vol 171 (3), 1591-1646 (2010).