por António Machiavelo
[Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]

Espécies mutantes de dominós

Os poliminós, generalizações naturais dos dominós, inspiraram jogos como o Tetris, desempenharam papéis importantes em livros de ficção e estiveram para aparecer no filme "2001: Odisseia no Espaço", de Stanley Kubrick. Estão na origem de muitos *puzzles* e de várias questões matemática e computacionalmente interessantes.

No início das férias grandes que se seguiram a ter terminado o ensino secundário, li a obra *Terra Imperial* de Arthur C. Clarke, editada em dois volumes na colecção Argonauta[1]. Nessa história, o protagonista recorda a certa altura[2] como a sua avó[3] lhe apresentou um *puzzle* envolvendo figuras formadas por cinco quadrados idênticos, cada um ligado a pelo menos um outro por uma aresta: os *pentaminós*. A sua primeira tarefa foi determinar exactamente quantos pentaminós distintos existem, supondo que estes podem ser virados e rodados à vontade. São 12 e estão ilustrados na Figura 1, juntamente com o nome por que são usualmente conhecidos.

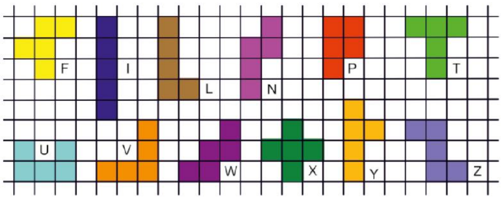

Figura 1 - Os 12 pentaminós e os seus nomes

De seguida, a avó desafiou-o a arranjar os 12 pentaminós num rectângulo[4] 6x10, dizendo-lhe que, apesar de existirem 2339 maneiras distintas de o fazer, não é fácil encontrar uma. No início da obra de Clarke está impressa uma solução, a da esquerda na Figura 2. No entanto, o assunto intrigou-me bastante, pelo que decidi fazer uns pentaminós de cartão e procurar outras soluções. Confirmei assim que, de facto, não era mesmo nada fácil encontrá-las! Mas, após algumas horas e inúmeras tentativas falhadas, eu e um meu amigo[5] tínhamos encontrado algumas soluções, não só para o rectângulo 6x10, como também para os rectângulos 5x12 e 4x15, que Clarke menciona na sua história, sem dar exemplos. Umas semanas depois, encontrámos uma configuração que nos deu particular satisfação, em que os pentaminós se dividem em dois grupos de seis, cada um formando um rectângulo 5x6, obtendo-se assim, em simultâneo, uma solução para o rectângulo 6x10 e uma para o rectângulo 5x 12. Consegue o leitor encontrá-la?

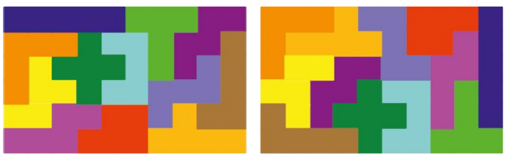

Figura 2 - Duas soluções para o rectângulo 6x10

[1] Números 281 e 282.
[2] Capítulo VII.
[3] Não exactamente no sentido biológico do termo, pois a personagem em questão é um clone.
[4] Aqui, e no que se segue, a expressão "rectângulo *a* x *b*" refere-se a um rectângulo formado por quadrados idênticos aos das respectivas figuras, sejam pentaminós ou similares, com *a* quadrados num lado e *b* quadrados no outro.
[5] Miguel Beltrão e Reis, que morreu demasiado cedo. A configuração da direita na Figura 2 é uma das soluções por ele encontrada, cerca das 18h00 do dia 17/6/1981, segundo um velho bloco de notas meu. Este artigo é uma pequena homenagem minha à sua memória e aos muitos bons momentos que passámos juntos.

Num conjunto de notas no final do segundo volume, Arthur C. Clarke informa que há apenas duas pavimentações do rectângulo 3x20 por pentaminós, exibindo-as, e menciona o curioso facto de que numa primeira versão de "2001: Odisseia no Espaço", Stanley Kubrick filmou HAL a jogar um jogo baseado nos pentaminós com os astronautas, tendo posteriormente esta cena sido substituída por uma em que se joga xadrez. Fica-se ainda a saber que foi através de um dos livros de Martin Gardner que Clarke se tornou viciado nos *poliminós*, as figuras formadas por quadrados iguais, com a condição acima referida de que cada quadrado tem de estar ligado a pelo menos um outro por uma aresta. Nessas notas é ainda mencionada a obra "Polyominoes"[6], ainda hoje imprescindível, de Solomon W. Golomb, o matemático que iniciou o estudo destes seres, descendentes mutantes dos dominós: triminós, tetraminós, pentaminós, hexaminós, etc. Claro que sem deixar de lado o próprio dominó e o seu antepassado, o monominó!

Apesar de vários problemas envolvendo poliminós terem aparecido antes, em especial na revista *Fairy Chess Review*, foi Golomb quem iniciou o seu estudo sistemático. Tudo começou com uma apresentação que este fez no Clube de Matemática de Harvard, em 1953, que no ano seguinte foi publicada com o título "Checkerboards and Polyominoes", na revista *The American Mathematical Monthly*[7]. Mas foi o artigo de Martin Gardner, na sua coluna "Mathematical Games" da Scientific American, em Maio de 1957, que tornou os poliminós conhecidos de um vasto público.

O que mais me intrigou em toda a história de Arthur C. Clarke foi a menção de que havia exactamente 2339 (um número primo!) maneiras distintas, sem contar com reflexões ou rotações, de preencher um rectângulo 6x10 com os 12 pentaminós. Seria verdade? Como teria este número sido obtido? Por algum raciocínio subtil? Por exaustão, tentando de algum modo todas as possibilidades, com a ajuda de um computador? Por uma mistura de raciocínio e cálculos computacionais? Na altura não tinha como averiguar ou descobrir as respostas a estas perguntas.

Um ano e tal depois, adquiri o meu primeiro computador: um ZX Spectrum com 16Kb de RAM. Voltei a pensar no assunto: como se programaria um computador para determinar o número de soluções, mesmo que por exaustão? Era claro que tal implicava alguma arte e engenho que eu então não possuía. Passaram-se muitos anos até eu perceber como tal poderia ser feito. Recentemente descobri na Internet um artigo de Donald Knuth, mestre supremo da arte de programar, na qual o assunto é magistralmente exposto. Esta pequena obra-prima está disponível em:

http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/papers/dancing-color.ps.gz

e em

http://arxiv.org/abs/cs/0011047

O leitor que se tenha sentido intrigado pelas questões que me perseguiram durante vários anos não poderá fazer melhor do que ler este artigo.

Não se conhece nenhuma fórmula simples nem um método rápido de calcular o número de n-minós para um dado n. A enumeração de poliminós é feita com algum engenho e custo computacional elevado, sendo apenas conhecido o número exacto de n-minós sem buracos para valores de n até 27. Estes valores foram calculados por Tomás Oliveira e Silva, do Departamento de Electrónica, Telecomunicações e Informática da Universidade de Aveiro. Ver a sua página sobre este assunto, no endereço:

http://www.ieeta.pt/~tos/animals/a44.html

Para saber mais sobre estes intrigantes seres e outros "animais" congéneres, ver "The Geometry Junkyard", uma colecção de *links* mantida por David Epstein, da Universidade da Califórnia em Irvine, que tem uma secção dedicada a estes "bicharocos", em:

http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/polyomino.html

A terminar ficam aqui três problemas para os leitores mais aventureiros e que não os conheçam já: 1) determinar o número de hexaminós distintos, quando virar e rodar é permitido; 2) mostrar que não se pode pavimentar com dominós um quadrado 8x8 em que foram retirados dois cantos diametralmente opostos; 3) mostrar que não se pode pavimentar nenhum rectângulo com os hexaminós. M

Errata:

No *Apanhados na Rede* da edição n.º 161 da *Gazeta de Matemática*, por erro de paginação, o símbolo $\lfloor x \rfloor$ foi substituído pelo símbolo (x), na terceira linha da coluna esquerda, página 20. Pedimos as nossas desculpas aos leitores.

[6] Publicada originalmente pela editora Charles Scribner's Sons, em 1965, e mais recentemente, em 1994, pela Princeton University Press, numa edição revista e aumentada.
[7] Vol. 61, n.º 10, December 1954.