

Os triângulos de Herão e as curvas elípticas

Dois triângulos com lados iguais são necessariamente iguais. Contudo, se tiverem o mesmo perímetro, não são necessariamente congruentes. E se tiverem a mesma área e o mesmo perímetro?

1. Uma história sobre dois triângulos

A seguinte questão surgiu a um grupo de professores enquanto trabalhavam no projecto *Focus on Math*, constituído por professores e matemáticos¹:

Se dois triângulos tiverem a mesma área e o mesmo perímetro, são necessariamente congruentes?

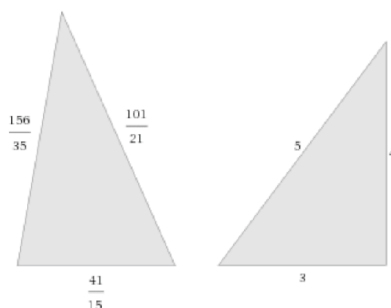


Figura 1: Dois triângulos não congruentes com a mesma área e o mesmo perímetro.

A resposta a esta pergunta é não. Por exemplo, o triângulo cujos lados medem 3, 4 e 5 tem a mesma área e o mesmo perímetro que o triângulo cujos lados medem $\frac{41}{15}$, $\frac{101}{21}$ e $\frac{156}{35}$ (ver Fig. 1). De facto, o perímetro vale

$$\frac{41}{15} + \frac{101}{21} + \frac{156}{35} = \frac{287 + 505 + 468}{105} = \frac{1260}{105} = 12 = 3 + 4 + 5.$$

O triângulo com lados 3, 4 e 5, tem área $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$. Para calcular a área do triângulo da esquerda usamos a fórmula de Herão, que afirma que a área de um triângulo com lados de comprimento a , b e c é dada por

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

onde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ é o semiperímetro do triângulo. Assim, o triângulo da esquerda também tem área

$$\sqrt{6 \left(6 - \frac{41}{15}\right) \left(6 - \frac{101}{21}\right) \left(6 - \frac{156}{35}\right)} = 6.$$

¹Uma descrição de como os professores e os matemáticos do projecto *Focus on Math* desenvolveram este problema pode ser consultada em S. Rosenberg, M. Spillane e D. Wulf, "Delving Deeper: Heron triangles and moduli spaces", *Mathematics Teacher* 101 (2008), n.º9, 656.

2. O espaço dos triângulos

Como é que poderemos encontrar exemplos como o que referimos anteriormente? O segredo consiste em representar de forma apropriada o conjunto de todos os triângulos. Há muitas formas de representar este conjunto; por exemplo, podemos pensar no conjunto dos triângulos como um subconjunto dos ternos $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ que correspondem às medidas dos três lados do triângulo. É claro que nem todos os ternos de \mathbb{R}^3 corresponderão a triângulos, já que as coordenadas desses ternos terão, no caso de representarem triângulos, de ser positivas. Talvez o leitor queira encontrar outras restrições.

Há outra forma de definir as coordenadas no espaço dos triângulos, usando ângulos em vez de lados. De facto, qualquer triângulo tem uma circunferência inscrita e existe uma relação simples entre o raio r desta circunferência, a área A do triângulo e o semiperímetro s , nomeadamente

$$A = rs. \quad (1)$$

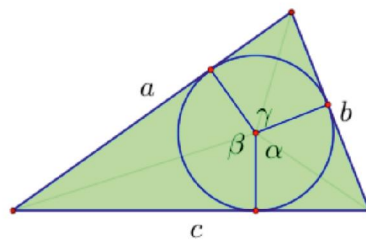


Figura 2: Os três ângulos α , β e γ determinam um triângulo.

Para se verificar a veracidade deste resultado, tracemos perpendiculares a partir do centro da circunferência dirigidas para os lados do triângulo, tal como se representa na Figura 2. Estas perpendiculares formam as alturas de três triângulos mais pequenos cujas bases são os lados do triângulo original e cujos vértices estão no centro da circunferência inscrita. Somando as áreas destes três triângulos, obtém-se a equação (1).

A equação (1) diz-nos que se dois triângulos têm a mesma área e o mesmo perímetro, então o raio das suas circunferências inscritas também é o mesmo. Assim, se estamos à procura de dois triângulos com a mesma área e o mesmo perímetro, vamos poder encontrá-los no conjunto de todos os triângulos circunscritos a uma dada circunferência fixa. Em vez de comprimentos de lados para parametrizar este conjunto, vamos usar os ângulos formados pelos três raios da circunferência, tal como se ilustra na Figura 2.

3. Uma curva de triângulos com área e perímetro constantes

Dentro deste conjunto vamos poder encontrar curvas que correspondem a uma família de triângulos com os mesmos valores de A e de s .

Expresse-se, antes de mais, s em termos dos ângulos α , β e γ , e do raio r da circunferência inscrita. Os raios e os segmentos que ligam os vértices do triângulo original ao centro da circunferência dividem o triângulo original em seis triângulos rectângulos (ver Figura 2). Como os segmentos de recta que unem os vértices ao centro bissectam os ângulos do triângulo original, estes triângulos dividem-se em três pares de triângulos congruentes. Tomando o comprimento da base de cada par e adicionando, obtém-se

$$s = r \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right). \quad (2)$$

Combinando as equações (1) e (2), resulta que, se a área A e o semiperímetro s são constantes, então também é constante a soma das seguintes tangentes:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{s^2}{A}. \quad (3)$$

De seguida vamos transformar esta igualdade numa equação que define uma curva no plano.

Sejam $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ e $z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$. Como, $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, temos

$$\frac{\gamma}{2} = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2},$$

logo,

$$z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}(\pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) = -\operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) = -\frac{x+y}{1-xy}.$$

Assim, se k for a constante $\frac{s^2}{A}$, a equação (3) pode reescrever-se na forma

$$x + y - \frac{x+y}{1-xy} = k,$$

ou seja,

$$x^2y + xy^2 + kxy = k.$$

Qualquer triângulo com área A e semiperímetro s determina um ponto nesta curva, e cada ponto desta curva numa determinada região do plano corresponde a um triângulo. A região corresponde a ângulos que de facto fazem sentido na Figura 1, nomeadamente a ângulos que satisfazem $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ e $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, que corresponde à região definida por $x > 0, y > 0$ e $xy > 1$ (uma vez que $z > 0$).

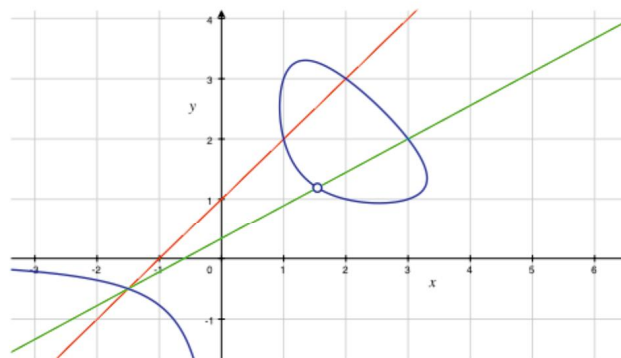


Figura 3: A curva dos triângulos.

A Figura 3 representa esta curva para $k=6$, o valor que corresponde ao triângulo com lados 3, 4 e 5. Qualquer ponto na parte desta curva que se situa no 1.º quadrante corresponde a um triângulo cujos lados são $a = x + y$, $b = y + z$ e $c = z + x$. Em particular, os pontos (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (1,3) e (3,1) correspondem todos ao triângulo com lados 3, 4 e 5, com os lados tomados por ordem diferente.

4. À procura de pontos na curva

Como a curva representada na Figura 3 está definida por uma equação do 3.º grau, podemos encontrar pontos nela, usando o método da secante. Dois pontos na curva determinam uma secante que corta a curva num outro ponto; encontrar esse ponto resume-se a resolver uma equação cúbica com duas raízes já conhecidas. Como já conhecemos seis pontos na curva, existem várias possibilidades para secantes, e conhecendo mais pontos, temos ainda mais possibilidades. Na verdade, a curva contém infinitos pontos com coordenadas

racionais. Pelo procedimento da secante ilustrado na Figura 3, somos conduzidos ao ponto $(\frac{54}{35}, \frac{25}{21})$ (indicado

com um círculo) que corresponde ao triângulo de lados $\frac{41}{15}$, $\frac{101}{21}$ e $\frac{156}{35}$.

O método da secante funciona em qualquer cúbica no plano. Estas curvas denominam-se *curvas elípticas* (não porque se tratam de elipses, mas sim porque surgem no estudo de uma classe específica de funções complexas chamadas *funções elípticas*). O método da secante permite definir uma estrutura de grupo no conjunto dos pontos racionais de uma curva elíptica (isto é, pontos cujas coordenadas são números racionais).

5. A moral matemática

O estudo das curvas elípticas é uma área central de investigação em teoria de números, com aplicações à criptografia subjacente à segurança das transacções financeiras que são feitas na Internet. Além disso, as curvas elípticas desempenharam um papel fundamental na demonstração do último teorema de Fermat.

A história descrita neste artigo mostra a unidade notável da matemática, começando pela forma como se apresenta na escola e terminando na investigação. Ao longo do percurso, encontrámos uma ideia fundamental da matemática moderna: a ideia da resolução de um problema sobre um determinado tipo de objectos (triângulos com área 6 e perímetro 12, por exemplo), situando-o num conjunto mais alargado (o espaço dos triângulos, neste caso) e encontrando uma forma correcta de parametrizar esse conjunto. **M**

Nota do Director:

Este artigo foi traduzido por Elfrida Ralha da Submitted Klein Vignete intitulada "Heron Triangles and Elliptic Curves", de acesso livre em <http://www.kleinproject.org/>, em Setembro de 2010, sob a licença "Creative Commons". A sua única referência reduz-se ao artigo de Steven Rosenberg, Michael Spillane e Daniel B. Wulf, "Delving Deeper: Heron Triangles and Moduli Spaces", *Mathematics Teacher* 101 (2008), n.º 9, 656, o qual descreve como os matemáticos e professores de Matemática trabalharam nesta questão em *Focus on Math* daquela revista da associação americana NCTM.

Chamada de contribuições para o Projeto Klein

A Comissão Coordenadora do Projeto Klein em Língua Portuguesa convida pesquisadores e professores a submeterem contribuições na forma de "pequenos artigos Klein", como descrito abaixo. As propostas devem ser enviadas no formato PDF para os coordenadores do Projeto Klein:

Yuriko Yamamoto Baldin (yuriko.baldin@uol.com.br) e Mario Jorge Dias Carneiro (carneiro@mat.ufmg.br) até 31 de janeiro de 2011.

Os artigos selecionados poderão ser indicados ao "Klein Project for 21st century" da ICMIIMU (International Commission on Mathematics Instruction – International Mathematics Union), e também poderão servir de ponto de partida para trabalhos mais extensos no âmbito do Projeto Klein. Aos autores dos artigos selecionados serão pagos direitos autorais no valor de 400 (quatrocentos) reais.

Pequenos artigos Klein

Textos de 2 a 4 páginas, em português, que apresentem tópicos relevantes da Matemática que se conectem a conhecimentos matemáticos de nível médio ou expliquem aplicações modernas significativas, proporcionando aos professores uma visão do estado da arte da Matemática. Os artigos devem atender às seguintes recomendações:

1. Motivar o assunto com um exemplo ou um problema estimulante que seja de interesse para o professor do ensino médio.
2. Chegar a avanços matemáticos recentes (do século XX, se possível).
3. Explicitar as idéias matemáticas envolvidas, mas evitando argumentos técnicos.

4. Apontar a importância do tema.

5. Fornecer referências acessíveis, por exemplo, na internet, que permitam aprofundar a reflexão matemática ou buscar aplicações no ensino da Matemática.

Alguns exemplos, em inglês, podem ser encontrado nos sítios:

wikis.zum.de/dmuw/index.php/Heron_Triangles_and_Elliptic_Curves, wikis.zum.de/dmuw/index.php/Calculators%2C_Power_Series_and_Chebyshev_Polynomials e wikis.zum.de/dmuw/images/f/f8/Google_klein_2.pdf

Projeto Klein em Língua Portuguesa

O projeto Klein em Língua Portuguesa é um projeto de ensino e pesquisa em parceria da SBM com a SBEM, SBHMat, SBMAC e OBMEP. O projeto é uma contribuição do Brasil ao "Klein Project for 21st century" da ICMI - IMU. Outras informações poderão ser obtidas no sítio www.sbm.org.br, clicando em *Projeto Klein em Língua Portuguesa*.

O objetivo central do "Klein Project for the 21st century" é produzir um livro, preparado em mais de 10 línguas, direcionado a professores do Ensino Médio para comunicá-los o fôlego e a vitalidade da pesquisa em matemática conectando-os ao conteúdo curricular da escola em nível secundário. O livro, em torno de 300 páginas, conterá "pequenos artigos" escritos de modo a inspirar professores em apresentar aos alunos uma perspectiva mais informada do campo cada vez mais interconectado e crescente da Matemática no mundo actual. O livro terá ainda suporte de redes, textos impresso e DVDs. Para mais informações, veja o sítio www.kleinproject.org.