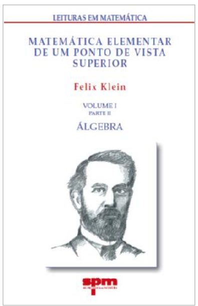
Felix Klein
Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior

Na nota introdutória da parte II relativa à Álgebra, Felix Klein escreve:

"Todos os meus desenvolvimentos algébricos convergem *numa* direcção, nomeadamente a sua *aplicação à resolução de equações usando métodos gráficos e, mais geralmente, métodos de percepção geométrica*. Este assunto, só por si, é um capítulo da álgebra muito extenso e relaciona-se amplamente com muitas outras áreas da matemática, sendo obviamente possível seleccionar apenas os pontos mais importantes e interessantes. Ao fazer isso, vamos criar uma relação orgânica com os mais variados temas. Em primeiro lugar, vamos estudar equações reais de variável real, de modo que possamos prosseguir, mais tarde, com as que envolvem quantidades complexas."



Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior
(Volume I, parte II) Felix Klein
"Leituras em Matemática" SPM
102 páginas | 7€ (sócios) 8€ (não-sócios)

Transcrevemos em seguida um pequeno excerto deste estudo que diz respeito à resolução de equações reais de variável real envolvendo um parâmetro.

Começamos com um caso muito simples , que é susceptível de tratamento geométrico. Trata-se de uma equação real algébrica na variável x, com um parâmetro λ:

$$f(x,\lambda)=0.$$

Para obter uma representação geométrica basta substituir o parâmetro λ por uma segunda variável, y, e encarar

$$f(x,y)=0$$

como uma curva no plano xy (ver Figura 1). Os pontos de intersecção desta curva com a recta $y=\lambda$*, paralela ao eixo dos x, dão-nos as raízes reais da equação* $f(x,\lambda)=0$. Quando esboçamos a curva, o que se pode fazer caso f não seja muito complicada, fazendo variar o λ na recta $y=\lambda$ podemos ver como o número de raízes reais varia. Este método revela-se particularmente eficaz quando f é linear em λ, isto é, com equações da forma

$$\varphi(x)-\lambda\psi(x)=0.$$

Se φ e ψ são racionais, a curva $y=\varphi(x)/\psi(x)$ também é racional, e é fácil de desenhar. Nestes casos torna-se vantajoso o uso deste método a fim de calcular, aproximadamente, as raízes das equações .

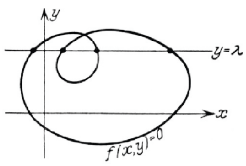


Figura 1

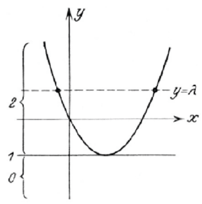


Figura 2

Como exemplo, consideremos a equação quadrática

$$x^2+ax-\lambda=0.$$

A curva $y=x^2+ax$ é uma parábola, sendo possível ver de imediato para que valores de λ esta equação admite duas, uma ou nenhuma raiz real, correspondendo às situações em que a recta horizontal $y=\lambda$ corta a parábola em dois, um ou nenhum ponto (ver Figura 2). Parece-me que a apresentação deste tipo de construções simples e óbvias seria muito apropriada em aulas avançadas do ensino secundário. M