por **Pedro J. Freitas**
[Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa]

O cubo de Rubik aos 30 anos

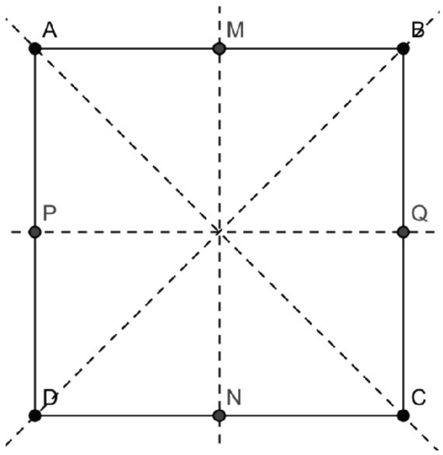
Apesar de já ter 30 anos, o cubo de Rubik continua a suscitar interesse, quer de quem gosta de *puzzles*, quer de matemáticos, que gostam de perceber como os *puzzles* funcionam.

Neste ano de 2010, o cubo de Rubik fez 30 anos! Embora Erno Rubik tenha construído o primeiro protótipo em 1974, só em 1975 é que o *puzzle* começou a ser comercializado e só em 1980, quando Rubik deu a licença de comercialização à Ideal Toys, é que ganhou popularidade. Foi justamente no início dos anos 80 que um dia o meu pai apareceu em casa com um cubo de Rubik. Na altura já fazia furor e diziam ser muito difícil. Pelo sim pelo não, o vendedor tinha o cubo "feito", isto é, com uma face de cada cor, para que os clientes não viessem depois reclamar, dizendo que o *puzzle* não se conseguia resolver.

Na altura eu era aluno do secundário e não sabia nada de teoria de grupos, o que eu queria era resolver o problema, coisa que não consegui fazer sozinho. Finalmente, acabaram por aparecer no jornal algumas soluções, que o meu pai copiou de forma mais clara e que apresento aqui no fim do artigo. Nelas se apresenta uma proposta de solução, que é feita por partes, do nível inferior para o superior. Mas antes de chegar lá, queria falar um pouco da história e da matemática do cubo, e de como esta última pode ser usada para explicar o algoritmo para a solução.

A descrição matemática do funcionamento do Cubo de Rubik é feita usando o conceito matemático de grupo. Um grupo é um conjunto onde está definida uma operação que é associativa, não necessariamente comutativa, que tem elemento neutro e para a qual todos os elementos têm inverso. Um exemplo simples é o conjunto dos números inteiros relativos, Z, com a operação de adição: neste caso, o elemento neutro é o zero e o oposto de cada elemento é o seu simétrico.

Este exemplo tem uma particularidade: a operação em questão é comutativa, coisa que não acontece em geral. De facto, um grupo, para além da sua definição formal, pode sempre ser entendido como um conjunto de aplicações que preservam uma certa estrutura, considerando-se neste caso a operação de composição, que como sabemos não é comutativa. Vejamos dois exemplos.



Os pontos M, N, P, Q são os pontos médios dos lados do quadrado.

Consideremos todas as transformações do plano que deixam este quadrado invariante. São elas: a identidade, três rotações, de 90°, 180° e 270°, em sentido anti-horário, e quatro reflexões, em relação às rectas MN, PQ, AC e BD. Se chamarmos id à identidade, r_1, r_2 e r_3 às três rotações e s_1, s_2, s_3 e s_4 às quatro reflexões, na ordem apresentada, obtemos o seguinte quadro para a composição. Por exemplo: $r_2 \circ s_4 = s_3$.

o	id	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3	s_4
id	id	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3	s_4
r_1	r_1	r_2	r_3	id	s_3	s_4	s_2	s_1
r_2	r_2	r_3	id	r_1	s_2	s_1	s_4	s_3
r_3	r_3	id	r_1	r_2	s_4	s_3	s_1	s_2
s_1	s_1	s_4	s_2	s_3	id	r_2	r_3	r_1
s_2	s_2	s_3	s_1	s_4	r_2	id	r_1	r_3
s_3	s_3	s_1	s_4	s_2	r_1	r_3	id	r_2
s_4	s_4	s_2	s_3	s_1	r_3	r_1	r_2	id

Analisando a tabela, podemos ver que, por exemplo, o conjunto $\{id, r_1, r_2, r_3\}$ é, por si só, um grupo para a mesma operação de composição – basta para isto olhar para as primeiras quatro linhas e colunas da tabela. Por causa disso, diz-se um *subgrupo* do grupo original. O conjunto $\{id, s_3\}$ é outro subgrupo, e este tem a particularidade de manter fixos os pontos *A* e *C*. Convidamos o leitor a tentar encontrar outros subgrupos, também com dois elementos, e a encontrar os seus pontos fixos.

O grupo que nos interessa aqui é o chamado *Grupo Simétrico em n elementos*, que denotamos S_n. É constituído por todas as aplicações bijectivas do conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ em si próprio, chamadas *permutações*. É simples de ver que são em número de n e que formam um grupo para a composição. Este grupo tem grande importância matemática, não só como objecto teórico mas também como ferramenta, por exemplo, na teoria de Galois. É um facto espantoso (embora simples de demonstrar) que qualquer grupo finito (quaisquer que sejam os seus elementos) pode ser visto como um subgrupo de S_n, para um n adequado. Assim, os grupos S_n contêm em si todos os grupos finitos que se possa imaginar – e contêm o grupo que nos vai interessar para o cubo de Rubik.

Antes de avançar, uma questão de notação. Sendo os elementos de S_n aplicações, alguns são chamados ciclos: aqueles em que um certo elemento é aplicado noutro, este num terceiro, e assim sucessivamente, até se chegar a um que é aplicado no primeiro. Por exemplo, a aplicação

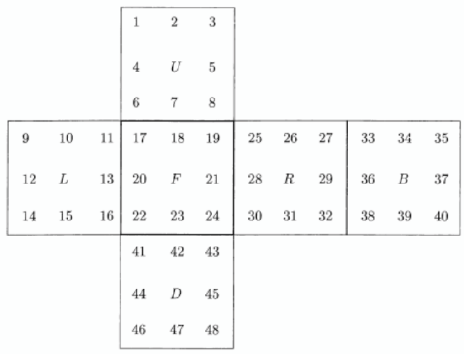
1➔3; 3➔4; 4➔2; 2➔1

é um ciclo, que é um elemento de S_4. Denotamo-lo da seguinte maneira: (1342). Podíamos também ter escrito (3421) ou (2134).

Com esta notação, torna-se agora simples descrever qualquer permutação, como produto de ciclos. Por exemplo, a permutação de S_5, que a cada n faz corresponder 6-n pode ser escrita como (15)(24).

Chamamos suporte de um ciclo aos números que aparecem na sua expressão escrita. É bem conhecido o teorema fundamental da aritmética, que afirma que qualquer número natural ou é primo ou é produto de primos, que estão bem definidos, a menos da ordem dos factores. O grupo simétrico tem um teorema semelhante: qualquer elemento de S_n se escreve como produto de ciclos, de suporte disjunto, de forma única – a menos da ordem dos factores, que, neste caso particular, por serem de suporte disjunto, comutam.

Pensemos agora nesta planificação do cubo, retirada de [1].



As letras *U*, *L*, *F*, *R*, *B* e *D* dizem respeito às faces (*upper*, *left*, *front*, *right*, *back* e *down*). Cada uma destas faces pode rodar tantas vezes como se queira. Depois de numerados os vértices, podemos representar cada um destes movimentos (rotações de 90 graus) por uma permutação, apresentada aqui como produto de ciclos:

Rotação de *F*: (17,19,24,22)(18,21,23,20)(6,25,43,16)(7,28,42,13)(8,30,41,11)
Rotação de *L*: (9,11,16,14)(10,13,15,12)(1,17,41,40)(4,20,44,37)(6,22,46,35)
Rotação de *R*: (25,27,32,30)(26,29,31,28)(3,38,43,19)(5,36,45,21)(8,33,48,24)

Convidamos o leitor a descrever deste modo as rotações em torno das outras faces, *U*, *D* e *B*. Assim, como se vê, conseguimos descrever as rotações do cubo como elementos de S_{48}. Ao tomarmos agora o menor subgrupo de S_{48} que contém estas permutações (o que corresponde a tomar todas as composições possíveis destas seis permutações), obtemos o chamado Grupo do Cubo.

A cada elemento deste grupo corresponde então uma posição possível para o cubo de Rubik. Com esta descrição, é possível calcular o número de posições possíveis do cubo, ainda que a conta não seja simples de fazer à mão, seria preciso desenvolver mais teoria acerca do Grupo do Cubo para o calcular. O número é:

$$8!\text{x}3^7\text{x}12!\text{x}2^{10} = 43{,}252{,}003{,}274{,}489{,}856{,}000.$$

Para se ter uma ideia do tamanho deste número, pensemos que temos um cubo, com 5,6 cm de lado, como habitualmente, representando cada uma destas disposições. Se isso acontecesse, os cubos cobririam toda a superfície da Terra (continentes e mares) até uma altura de 15 metros.

Apesar desta enorme quantidade de posições possíveis, foi demonstrado em 2008 que qualquer posição (por exemplo, a posição do cubo "resolvido") pode ser atingida em apenas 22 movimentos (ver [2]). Naturalmente, o problema é encontrar estes 22 movimentos, para cada posição do cubo.

Em geral, as pessoas que conseguem resolver o cubo em pouco tempo conjugam vários métodos de resolução. O recorde actual é 7,08 segundos e pertence a Erik Akkersdijk, segundo a World Cube Association [3]. Neste momento, a resolução do habitual cubo com dimensões 3x3x3 é apenas uma das muitas variantes que já existem: há já cubos de maiores dimensões e competições feitas com os olhos vendados (recomenda-se uma visita ao *YouTube* para ver algumas destas espantosas resoluções).

A resolução aqui apresentada é uma das duas mais tradicionais e baseia-se em certos movimentos que produzem os resultados pretendidos, construindo a resolução por níveis. Em termos de teoria de grupos, o que se passa aqui é que é possível encontrar subgrupos do Grupo do Cubo que mantêm invariante uma certa parte deste e permitem uma movimentação completa da parte restante, dentro das possibilidades do *puzzle* – no jargão da teoria de grupos, diz-se que actua transitivamente nesta segunda parte. Também no modesto grupo de simetrias do quadrado havia subgrupos (com dois elementos) que preservavam dois vértices opostos, trocando os outros dois. Teoricamente a situação é semelhante, apesar da maior complexidade do Grupo do Cubo.

Sem mais delongas, então, aqui fica a resolução que, nesse início dos anos 80, saiu num jornal português e que é uma das duas mais conhecidas. Para os leitores que nunca resolveram o cubo até ao fim, aconselho a experiência de ver a teoria de grupos em acção na ponta dos dedos. M

Referências

[1] Adventures in Group Theory – Rubik's Cube, Merlin's Machine and Other Mathematical Toys.

[2] **T. Rokicki,** "Twenty-Two Moves Suffice", *http://cubezzz.homelinux.org/drupal/?q=node/view/121* (consultado a 15 de Julho de 2010)

[3] World Cube Association, *http://www.worldcubeassociation.orng/* (consultado a 15 de Julho de 2010)

Bibliografia

Bandelow, Christoph (1982), *Inside Rubik's cube and beyond*, Birkhäuser

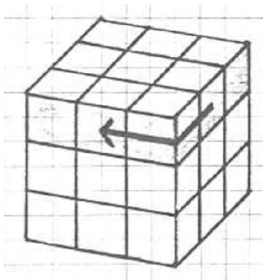
Rokicki , Tomas, "Twenty-Five Moves Suffice for Rubik's Cube", *http://arxiv.org/abs/0803.3435* (consultado a 15 de Julho de 2010)

Anexo: Solução do cubo de Rubik (método de Luís Santos)

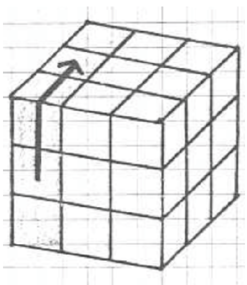
Código:

S^+, E^+, F^+ e D^+ significam as rotações de 90º esquematizadas.

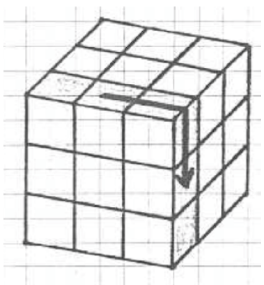
S^+ (superior)



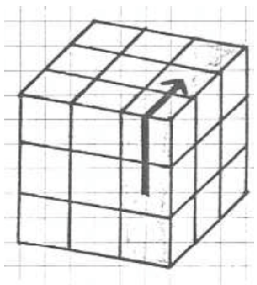
E^+ (esquerda)



F^+ (frente)



D^+ (direita)

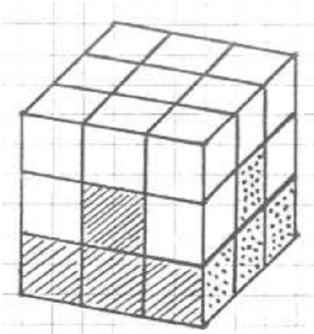


S^-, E^-, F^-, D^- significam as rotações esquematizados , em sentido contrário.

1ª FASE: execução de um 1.º piso

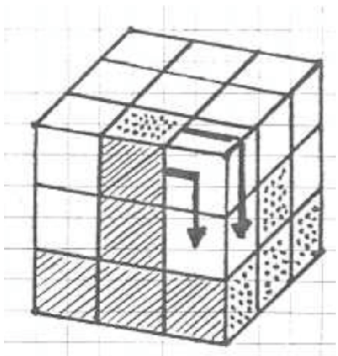
2ª FASE: execução do 2.º piso

a) Colocação do cubo:
- Voltar para baixo a face correcta do cubo;
- Girar o 2.º piso até acertar os centros com o piso correcto.



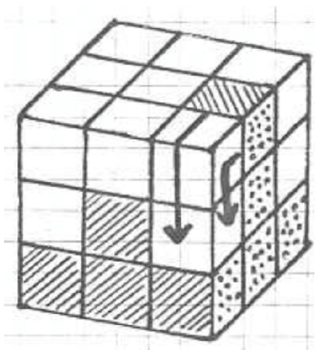
b) Girar o 3.º piso até que se verifique uma das situações seguintes e efectuar o movimento indicado.

Situação A



Movimento 1
$S^+ D^+ S^- D^- S^- F^- S^+ F^+$

Situação B



Movimento 2
$S^- F^- S^+ F^+ S^+ D^+ S^- D^-$

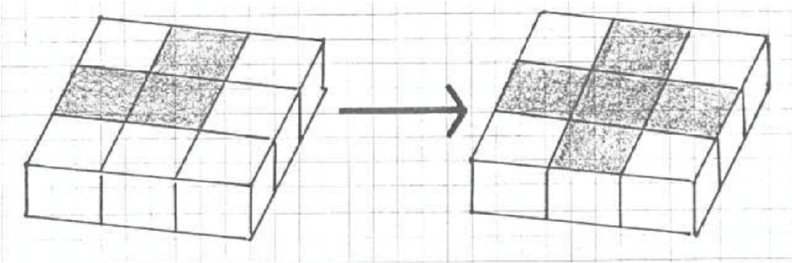
c) Efectuar b) tantas vezes quanto as necessárias até completar o 2.º piso.

Caderno_3
sexta-feira, 12 de Novembro de 2010 15:51:57

As fases seguintes destinam-se a executar o 3.º piso pelo que apenas esse será figurado.

3ª FASE: Fazer a cruz na face de cima (independentemente das cores adjacentes e das contas)

Posição inicial correcta | Posição final



Movimento 3 $D^- S^- F^- S^+ F^+ D^+$

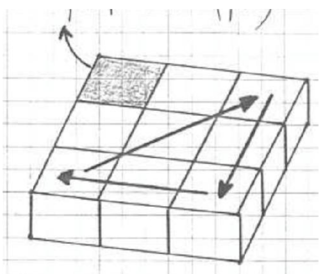
Observação: Se a posição inicial correcta não for imediatamente possível após a 2ª fase, executar o Movimento 3 a partir de uma posição inicial qualquer até que a posição correcta seja viável.

4ª FASE: Colocação dos cantos

Pretende-se trocar os cantos no 3.º piso para que fiquem na sua posição correcta (cores certas com as dos 1.º e 2.º pisos, ainda que as cores das faces se cada um dos cantos não fiquem na sai posição correcta). Para o efeito, rodar o piso até que se verifique uma das situações seguintes e efectuar o movimento indicado.

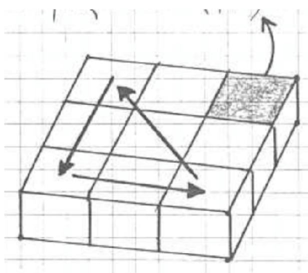
Situação A

"posição boa" (fixa)



Situação B

"posição boa" (fixa)



Movimento 4
$E^- D^- S^+ E^+ S$- $D^+ S^+ E^- S^- E^+$

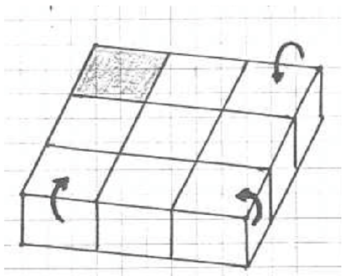
Movimento 5
$E^- D^- S^- D^+ S^+ E^+ S^- D^- S^+ D^+$

Observação: Se nenhuma das situações ocorrer, fixar uma "posição má" e efectuar os movimentos 4 ou 5 até que uma das situações A ou B seja obtida.

5ª FASE: Torção dos cantos

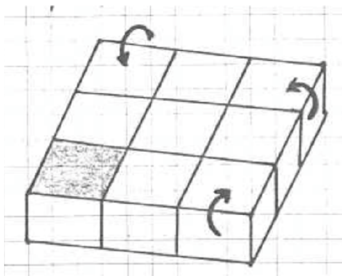
Pretende-se "torcer" os cantos no 3.º piso para que as cores fiquem na posição correcta. Para o efeito, rodar o cubo até que se verifique uma das situações seguintes e efectuar o movimento indicado.

Situação A



"posição boa" (fixa)

Situação B



"posição boa" (fixa)

Movimento 6
$D^- S^- D^+ S^- D^- S^{180º} D^+ S^{180º}$*

*na fase seguinte S^+

Movimento 7
$D^+ S^+ D^- S^+ D^+ S^{180º} D^- S^{180º}$**

**na fase seguinte S^-

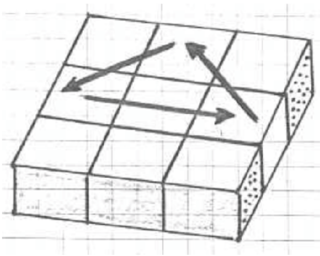
Observação: Se nenhuma das situações se verificar, fixar criteriosamente um canto numa "posição má" e efectuar um dos movimentos 6 ou 7 de forma a que uma das situações desejadas ocorra.

6ª FASE: Trocar os bordos

Pretende-se trocar a posição dos cubos centrais das facetas laterais do 3.º piso para que passem a ocupar a sua posição correcta. Para o efeito, rodar o cubo até que se verifique uma das situações seguintes e efectuar o movimento indicado.

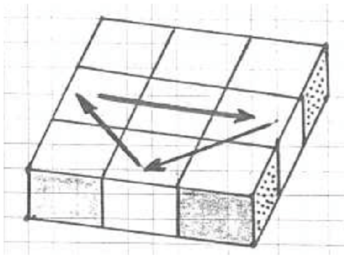
Caderno_3
sexta-feira, 12 de Novembro de 2010 15:52:00

Situação A



Movimento 8
Movimento 6, com S^+ no 8.º passo, seguido do Movimento 7, com S^- no 8.º passo.

Situação B



Movimento 9
Movimento 7, com S^- no 8.º passo, seguido do Movimento 6, com S^+ no 8.º passo.

Observação: Se nenhuma das situações se verificar, efectuar criteriosamente o Movimento 8 ou o Movimento 9 de forma a que uma das situações desejadas ocorra.