
por António Serra
[Instituto Superior Técnico]

# A função Gama?

## Quanto é um meio factorial?

**Ene menos um factorial**

O factorial de um inteiro positivo $n$ é o produto de todos os inteiros entre 1 e $n$ e escreve-se $n!$ (“$n$ factorial”). Para todo o $n$ tem-se $(n+1)(n!)=(n+1)!$ e, definindo $0!=1$, esta regra continua válida sempre que $n$ é um inteiro não negativo. Esta função não se pode prolongar a -1 ou qualquer outro inteiro negativo de modo a que a mesma regra continue válida para todo o $n$ (porque eventualmente se chega a $n=-1$). Por outro lado, existem infinitas funções $f$ de variável real (ou complexa) definidas no complementar do conjunto dos inteiros negativos que satisfazem a identidade $f(z+1)=(z+1)f(z)$.

Uma generalização do factorial a todos os reais positivos pode definir-se da seguinte maneira:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dx. \qquad (1)$$

O integral acima é chamado *segundo integral de Euler* e converge sempre que $x$ é um real positivo. Verifica-se facilmente que $\Gamma(1)=1$ e integrando por partes demonstra-se que $\Gamma$ satisfaz a seguinte regra do produto: $x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$. Em particular, se $n$ for um inteiro positivo, então $\Gamma(n)=(n-1)!$.

O nosso objectivo é convencer o leitor de que esta função, hoje conhecida por **função Gama**, é a generalização natural de $(n\text{-}1)!$ aos reais positivos.[1]

**Generalizações “naturais”**

Se tivermos uma função definida num conjunto de inteiros, como a representada na Figura 1 e procurarmos um “prolongamento natural” a um intervalo que contenha estes números, acreditamos que o prolongamento representado na Figura 2 seja geralmente considerado mais “natural” do que o representado na Figura 3. A razão é que as Figuras 1 e 2 partilham uma importante característica geométrica, ausente na Figura 3: se unirmos os pontos da Figura 1 por segmentos de recta, obtemos o gráfico de uma função no intervalo [2,5], e os conjuntos de todos os pontos do plano que ficam por cima desse gráfico e do representado na Figura 2 são convexos, isto é, se contiverem dois pontos A e B, também contêm o segmento [AB].

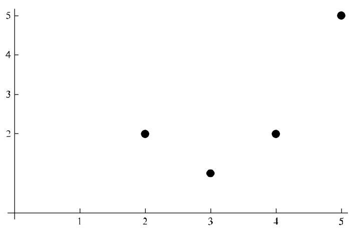


Figura 1

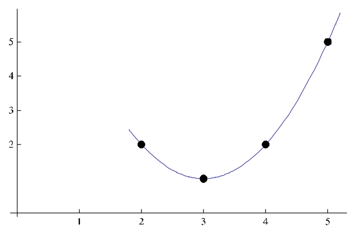


Figura 2

[1] Não parece ser clara a razão por que se define $\Gamma(n)=(n-1)!$ e não $n!$ (o que causa a diferente formulação da regra do produto). No seu livro [3], H. Edwards atribui a Legendre a notação actual.

As funções cujos gráficos têm esta propriedade chamam-se *funções convexas* e têm grande importância em diversas áreas da matemática e das suas aplicações. Se uma função definida num intervalo aberto da recta real tiver segunda derivada, então é convexa se e só se a sua segunda derivada nunca for negativa. Mas a função que associa a cada real $x$ o seu módulo $|x|$ é convexa e não tem sequer derivada em $x=0$.

Acontece que se representarmos graficamente o logaritmo de $(n-1)!$ para cada inteiro positivo $n$ (Figura 4) obtemos um gráfico com a mesma propriedade do da Figura 1: unindo os pontos consecutivos por segmentos de recta, formamos o gráfico de uma função convexa. Isto acontece porque, como o logaritmo é uma função crescente, o declive dos segmentos de recta vai aumentando (ver Figura 4).

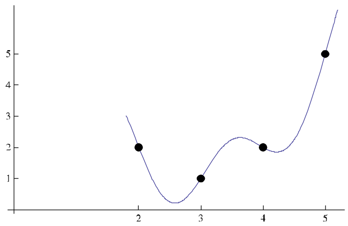


Figura 3

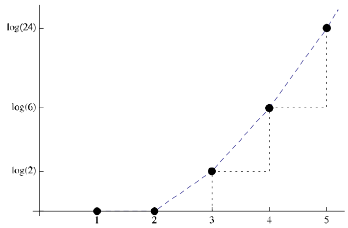


Figura 4

Se concordarmos com as considerações que abrem esta secção, um prolongamento natural $g$ de $(n-1)!$ aos reais positivos deverá ter as seguintes propriedades:

- Propriedade do produto: para todo o $x>0$, $xg(x)=g(x+1)$.
- A função $\log(g)$ é convexa.

No seu livro *Lærebog i Kompleks Analyse* (*Manual de Análise Complexa*), de 1922, H. Bohr[2] e J. Mollerup demonstram que a função Gama é o único prolongamento de $(n-1)!$ aos reais positivos que satisfaz estas condições. E. Artin ([2]) chama a este facto notável *Teorema de Bohr-Mollerup*.

**Uma fórmula de Gauss**

Suponhamos que existe uma função $g$ que satisfaz as condições do Teorema de Bohr-Mollerup.

Por causa da regra do produto, os valores de $\log(g)$ no intervalo $]0,1[$ determinam $g$ nos reais positivos. Por exemplo, dado $x$ em $]0,1[$, $g(x+3)=(x+2)(x+1)xg(x)$. Além disso, se soubermos o valor de $g(x+3)$, podemos calcular $g(x)$. Se o gráfico de $\log(g)$ fosse rectilíneo no intervalo $[3,4]$ (como na Figura 4), teríamos: $\log(g(3))=\log 2$, $\log(g(4))=\log 6$, e então $\log(g(x+3))$ seria $\log 2+x(\log 6-\log 4)$, ou seja, $\log 2+x\log 3$. Isto está errado, evidentemente.

Quando $n$ é um inteiro positivo, os declives dos segmentos de recta $[(n,\log((n-1)!)),(n+1,\log(n!))]$ e $[(n+1,\log(n!)),(n+2,\log((n+1)!))]$ são respectivamente $\log n$ e $\log(n+1)$. A diferença entre estes dois declives é $\log(1+1/n)$, que tende para zero quando $n$ tende para infinito. Ou seja, quando $n$ é muito grande, esses dois segmentos de recta são quase paralelos.

A convexidade de $\log(g)$ tem agora uma consequência crucial: se prolongarmos ambos os segmentos ao intervalo $[n,n+2]$, em todo o intervalo o gráfico de $\log(g)$ tem de permanecer entre estes segmentos[3] (ver Figura 5).

Isto significa que embora $\log 2+x\log 3$ seja apenas uma estimativa de $\log(g(x+3))$, a diferença entre $\log(g(x+n))$ e a estimativa $\log(g(n))+x(\log(g(n+1))-\log(g(n)))$ tende para zero quando $n$ tende para infinito. Ora, são conhecidos os valores de $g$ nos inteiros positivos e, pela regra do produto, tem-se $g(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)xg(x)$. Assim,

$$\log(g(x)) = \lim\left[\log(g(n))+x(\log(g(n+1))-\log(g(n)))-\sum_{k=0}^{n-1}\log(x+k)\right] = \lim\left[\log((n-1)!)+x\log(n)-\sum_{k=0}^{n-1}\log(x+k)\right] \quad (2)$$

[2] "H" de Harald. Não confundir com Niels Bohr, que propôs o primeiro modelo atómico que explicava os números quânticos e foi um dos fundadores da Mecânica Quântica. Esse era o irmão mais velho de Harald.

e, tomando a exponencial destas expressões, obtém-se a **fórmula do produto de Gauss**:

$$g(x) = \lim \frac{n^x (n-1)!}{x\,(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

Dado um inteiro positivo $n$, verifica-se facilmente que a segunda derivada da função

$$f_n(x) = \log((n-1)!) + x \log n - \sum_{k=0}^{n-1} \log\,(x+k)$$

é positiva em $\mathbb{R}^+$, sendo portanto $f_n$ uma função convexa. O limite pontual de funções convexas, quando existe, é uma função convexa. Assim, a existência da função $g$ é equivalente à existência de limite positivo na fórmula de Gauss, que é por sua vez equivalente à existência do limite em (2). Uma demonstração directa da existência deste limite será esboçada na última secção.

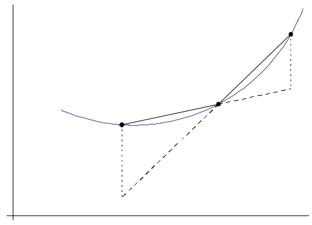

Figura 5

**Menos um meio factorial**

Por comodidade, iremos chamar "log-convexa" a uma função $f$ com valores positivos num intervalo $I$ tal que $\log f$ é uma função convexa em $I$. Recordemos que uma propriedade fundamental de $g$ é que esta função é log-convexa. Do mesmo modo que a soma de duas funções convexas e o produto de uma função convexa por um real positivo são funções convexas (o que é fácil de demonstrar), o mesmo acontece para funções log-convexas (o que já não é tão fácil, embora seja simples - "simples" e "fácil" não são sinónimos).

Para cada $t>0$ fixo, a função $f\,(x)=e^{-t}\,t^{x-1}$ é log-convexa em $\mathbb{R}^+$, visto que o seu logaritmo é $(\log\,t)(x\text{-}1)\text{-}t$ (repetimos, $t$ é um parâmetro positivo fixo e a variável é $x$). Se prestarmos atenção ao segundo integral de Euler (1), vemos que ele representa o limite de somas de funções da forma $(\Delta t)\,e^{-t}\,t^{x-1}$, que são log-convexas porque $\Delta t$ é um número positivo. Isso quer dizer que *o segundo integral de Euler define um prolongamento log-convexo de (n-1)! aos reais positivos que satisfaz a regra do produto*. Fica assim demonstrado que a função $g$ que procuramos é a função Gama. Isto também demonstra a existência de limite positivo na fórmula do produto de Gauss.

De modo análogo se prova que o *primeiro integral de Euler*:

$$B(x,y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1}\, t^{y-1}\, dt, \qquad x,y>0 \tag{3}$$

é igual a $\Gamma\,(x)\,\Gamma\,(y)/\,\Gamma\,(x+y)$: fixando $y>0$, a função $g\,(x)=\Gamma\,(x+y)\;B(x,y)/\,\Gamma\,(y\,)$ satisfaz as condições do Teorema de Bohr-Mollerup[4] e portanto tem de ser a função Gama. Em particular, tem-se $B(1/2,1/2)=\Gamma\,(1/2)^2$. Fazendo em (3) a substituição $t=\text{sen}^2(s)$ obtém-se $B(1/2,1/2)=\pi$, logo $\Gamma\,(1/2)=\sqrt{\pi}$.

Como seria de esperar, outros valores da função Gama são ainda menos fáceis de calcular. Alguns podem ser consultados de forma rápida e cómoda, tal como o gráfico da função nos reais positivos, por exemplo, em [4].

Na verdade, a função Gama pode ser prolongada "de forma natural" ao conjunto de todos os números complexos, excepto o zero e os inteiros negativos. Esse prolongamento é único, não tem zeros e satisfaz a regra do produto. O leitor interessado poderá consultar [1].

[4]Verifica-se que $B(1,y)=1/y$, a propriedade do produto prova-se integrando por partes (com um pouco de álgebra no fim) e a função dentro do integral é log-convexa.

**A constante de Euler**

Seja $n$ um inteiro positivo e $x$ em ]0,1[. É um exercício simples mostrar que existe uma função contínua $h$ no intervalo ]-1, +∞[ tal que $\log(1+y) - y = h(y)y$^2. Agora,

$$\log((n-1)!) + x\log n - \sum_{k=0}^{n-1}\log(x+k) = x\log n - \log x - \sum_{k=1}^{n-1}\log(1+x/k) = x\left(\log n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) - \log x - \sum_{k=1}^{n-1}h(x/k)\frac{x^2}{k^2}.$$

Como $h$ é limitada no intervalo $[0,x]$, o último somatório acima converge quando $n$ tende para infinito (porque a série $\Sigma 1/k^2$ é convergente). A sucessão $\gamma_n = \log n - \sum_{k=1}^{n-1} 1/k$ também é convergente: o seu termo de ordem $n$ é igual ao integral $\int_1^n (C(x) - 1/x)dx$ (onde $C(x)$ designa o maior número inteiro não superior a $x$). A Figura 6 demonstra geometricamente que esta sucessão é crescente e converge para um certo real do intervalo ]1/2,1[. Esta é a demonstração directa prometida da existência de limite positivo na fórmula do produto de Gauss, ou seja, do limite em (2).

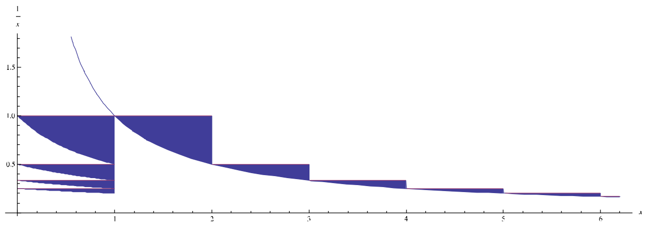

Figura 6

O limite da sucessão $(\gamma_n)$ é chamado *constante de Euler* e habitualmente representado por $\gamma$, e o seu valor aproximado é 0.5772... O matemático Stefan Krämer, da Universidade de Göttingen, lidera actualmente um projecto ([5]), que visa reunir (e aumentar) toda a informação que existe sobre esta constante. Ninguém sabe sequer se $\gamma$ é um número irracional. Usando meios computacionais, conhece-se hoje o seu valor com tal precisão que se sabe que, se $\gamma$ for um número racional, o numerador e o denominador da fracção irredutível terão (pelo menos) centenas de milhares de algarismos. Mas isso não prova nada. As distâncias entre as estrelas e entre as galáxias mostram bem que os mistérios do Universo não estão feitos à medida das conveniências humanas. M

**Referências**


[1] **L. V. Ahlfors**. *Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978.

[2] **E. Artin**. "The Gamma Function". Translated by Michael Butler. Athena Series: Selected Topics in Mathematics. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

[3] **H. M. Edwards**. *Riemann's Zeta Function*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2001.

[4] **E.W. Weisstein**, "Gamma Function." From *MathWorld* - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html

[5] *http://www.math.uni-goettingen.de/skraemer/gamma.html*