ATRACTOR

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site *www.atractor.pt* .
Quaisquer reacções ou sugestões serão bem- vindas para *atractor@atractor.pt*

ATRACTOR DE SIERPINSKI

Na realidade o número de sorteios é infinito. Nenhuma decisão é final, todas se ramificam noutras. Os ignorantes supõem que infinitos sorteios requerem um tempo infinito: na verdade basta que o tempo seja infinitamente divisível, como o ensina a famosa parábola da corrida com a tartaruga. Esta infinidade condiz de maneira admirável com os sinuosos números do acaso.

Jorge Luis Borges, "A Lotaria na Babilónia"

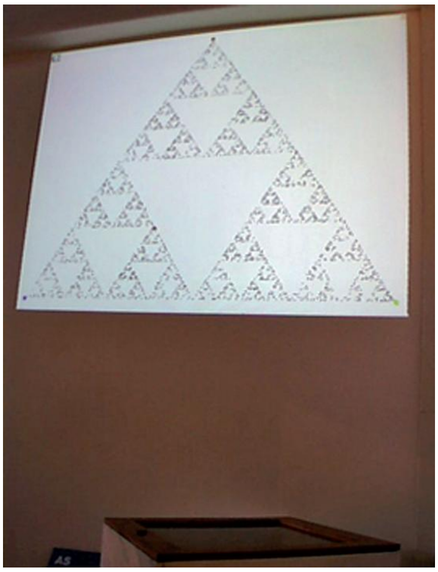


Figura 1

À entrada da exposição "Matemática Viva", agora encerrada, encontrava-se um módulo que, ao longo de quase uma dezena de anos, construiu uma imagem que foi sendo uma aproximação cada vez mais perfeita de um *atractor*. O desenho, que se projectava numa das paredes do Pavilhão do Conhecimento, é resultado de uma escolha inicial, em 2000, de um dos vértices de um triângulo equilátero previamente fixado, pintados de azul, verde e encarnado, e da iteração de um processo simples – e ao visitante bastava accionar um botão que lançava um dado. Este cubo tinha as faces pintadas com aquelas três cores, a mesma cor em cada par de faces opostas; um sensor tomava nota da cor que saía no lançamento e era então adicionado à imagem o ponto médio do segmento que une o vértice dessa cor ao ponto anteriormente assinalado (figuras 2 e 3).

Assim, a partir da primeira imagem com apenas três pontos coloridos dispostos nos vértices do triângulo equilátero, foram-se formando, no triângulo (e no seu interior), confi-

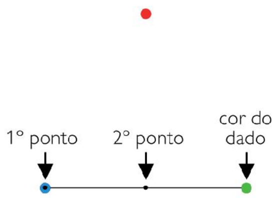


Figura 2

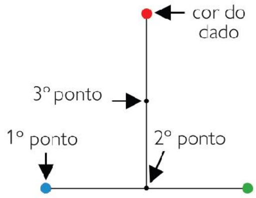


Figura 3

gurações de aspecto complicado cujo limite, que designaremos por L (figura 1), não está ao nosso alcance desenhar mas podemos descrever. Suponhamos que o ponto inicial, digamos P, é o vértice azul do triângulo (considerações análogas são válidas se a escolha recair sobre outro vértice). O que foi surgindo na parede são pontos da *órbita* de P por um *sistema dinâmico aleatório*: se f_A, f_V e f_E são as funções que a cada ponto do plano fazem corresponder o ponto médio do segmento que une esse ponto ao vértice azul (A), verde (V) e encarnado (E), respectivamente, então, em cada instante, o novo ponto desenhado na parede é o resultado da composição $f_{a_n} f_{a_{n-1}} \ldots f_{a_1}(P)$, na qual $(a_n)_{n \in N}$ é a sucessão de cores determinada pelos lançamentos do dado. A figura seguinte mostra as imagens que se teriam obtido se, no dado, tivesse saído: (a) sempre a cor azul; (b) alternadamente azul e verde; (c) azul, verde e encarnado, repetidas nesta ordem.

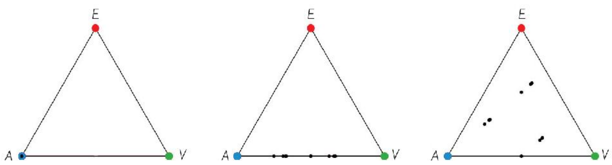
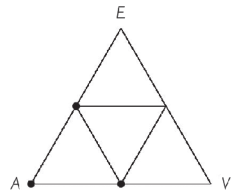


Figura 4

Observe-se que, depois de determinada uma cor, o processo exposto consiste em aplicar ao ponto anteriormente pintado uma homotetia de razão 1/2 e centro no vértice dessa cor. Deste modo, após a primeira aplicação do processo, o ponto obtido terá de ocupar uma das três posições indicadas na figura 5, que são os vértices de um dos quatro triângulos equiláteros em que se divide o triângulo original [AEV]. Analogamente, após o segundo lançamento do dado, o novo ponto terá de ocupar uma das nove posições assinaladas na figura 6, que são vértices de alguns dos doze triângulos equiláteros iguais em que se dividem três da geração anterior – a região triangular central, sem o bordo, da figura 5 não voltará a intervir no processo. Em geral, na n-ésima iteração, o ponto que se acrescenta tem de pertencer aos vértices de uma família de triângulos pequeninos, equiláteros e iguais, em que se dividem os da geração anterior, saindo da jogada as correspondentes regiões triangulares centrais sem o bordo. Assim, o conjunto L_n , formado pelas n primeiras iterações de P, determinadas pelas cores que os sucessivos lançamentos do dado seleccionam, está contido na intersecção S da família infinita de regiões triangulares, com bordo, que em cada etapa perduram. Como veremos, L_n não é S para nenhum n. Contudo, como sugeria o módulo no Pavilhão do Conhecimento, se o processo que gera a sucessão de cores é aleatório e n é suficientemente grande, então L_n é uma boa aproximação de S.



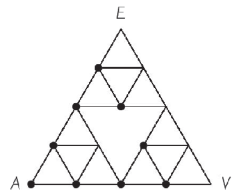


Figura 6

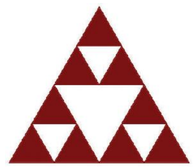


Figura 7

A figura S, conhecida como *triângulo de Sierpinski*, é o resultado do seguinte procedimento de corte na região triangular R_1 cujo bordo é o triângulo equilátero [AEV]. De R_1, retira-se o interior do triângulo médio, o que tem vértices nos pontos médios dos lados do bordo de R_1; obtemos uma região R_2 formada por três regiões equiláteras, cada uma com 1/4 da área de R_1; prosseguimos de modo análogo, suprimindo de cada uma delas o interior do triângulo médio, obtendo-se R_3. A figura S é a intersecção de todos os R_i's. Por construção, S é um conjunto não vazio, compacto, conexo e de área nula. E coincide com a união dos bordos das regiões R_i que são os lados dos pequenos triângulos equiláteros que sobrevivem ao sucessivo esburacar do triângulo inicial. Consideremos o lado deste triângulo (que supomos ter comprimento 1) de extremos A e V. Note-se que a marcação de pontos neste lado, pelo processo que constrói cada L_n, pressupõe que a cor encarnada não sai nos lançamentos do dado. Após o primeiro lançamento, pode ficar marcado o ponto A ou o ponto médio do segmento [AV]; com o segundo lançamento, são dois os novos pontos que se podem acrescentar: os que se encontram, respectivamente, a uma distância de 1/4 e 3/4 de A. Em geral, qualquer ponto de [AV] seleccionado por este sistema dinâmico aleatório dista de A uma fracção do conjunto de racionais $D = \{\frac{a}{b} : a \text{ e } b \text{ inteiros}, 0 \leq a \leq b \text{ e } b \text{ é uma potência de expoente não negativo de } 2\}$. Em particular, o ponto do segmento [AV] que dista 1/3 de A não consta de nenhum L_n, mas pertence a S, que contém todo o segmento $[AV]$.

Como o processo de lançamento do dado é aleatório, fixado um ponto X de S e um erro ε, existe um natural n e um ponto de L_n que dista de X menos de ε. Como é que, em geral, utilizando elementos da órbita definida, poderemos chegar perto de um ponto X de S? Exemplifiquemos com um erro máximo permitido de 1/8 e o ponto X da figura 8. Como indicam as figuras 9 e 10, X pertence à região R_3 e está a uma distância inferior a 1/8 do ponto Q, vértice de T. Ora, a região pintada de encarnado na figura 8 é precisamente a imagem do triângulo inicial por uma homotetia de centro no vértice encarnado e razão 1/2 . (Afirmações análogas valem para as outras cores na figura, e também para as subdivisões em triângulos menores indicadas nas figuras 9 e 10).

Daqui deduzimos que Q pode ser marcado ao fim de três lançamentos do dado, desde que a sucessão de cores contenha, nos três primeiros termos, as cores encarnado, verde e encarnado, por esta ordem (Figura 11).

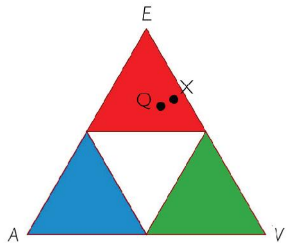


Figura 8

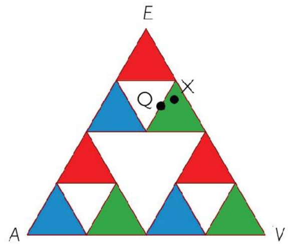


Figura 9

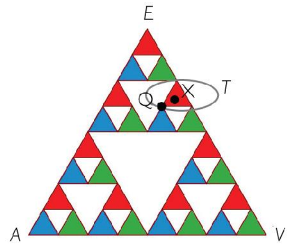


Figura 10

Note-se, contudo, que, mesmo sendo a sucessão de cores gerada por um processo aleatório, não sabemos se ela tem esta propriedade. Embora, no caso geral, seja complicado encontrar na sucessão de cores um bloco que nos sirva para, a partir do vértice azul, chegar perto de X, podemos afirmar que, com probabilidade 1, existe na sucessão de cores um tal bloco.

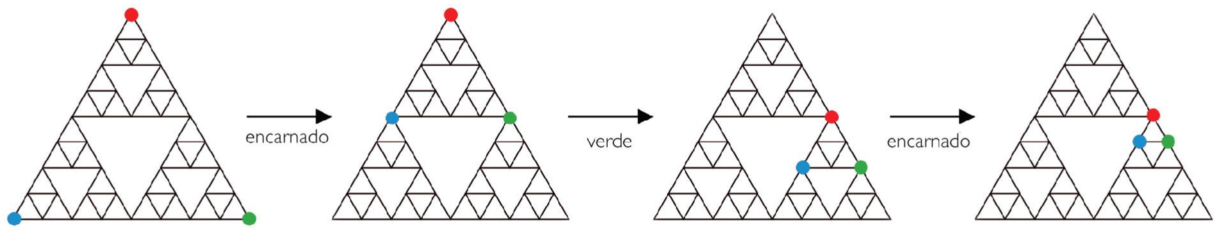


Figura 11