Rui Rodrigues
Universidade Nova de Lisboa
rapr@fct.unl.pt

O QUE É UMA **WAVELET?**

Investigadores de visão de computador, geofísicos, físicos, matemáticos e engenheiros electrotécnicos trabalhando em processamento de sinal criaram as diversas componentes de uma ferramenta que hoje é largamente utilizada no processamento de dados.

Muitas vezes é útil ter uma representação de uma função que saliente características que não se evidenciam quando conhecemos apenas o valor da função em cada um dos seus pontos.

Uma dessas características é o "peso" de uma dada frequência na função: pretende-se com isto saber "quanto a função oscila a uma dada frequência".

No que se segue, uma função será um dos dois objectos seguintes:

- Uma função real, $f(x)$, definida no intervalo $[0, T]$. Diremos que este é o objecto contínuo, embora a função considerada não seja necessariamente contínua.

- A versão discreta do objecto anterior será um vector de n números reais $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$. Este vector poderá representar, por exemplo, os valores da função $f(x)$, nos pontos $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, do intervalo $[0, T]$. As funções consideradas serão objectos deste segundo tipo quando estivermos a trabalhar com dados reais: registos sísmicos, sinais biomédicos, sinais sonoros ...

Representaremos por $c(f,g)$ a *correlação* entre duas funções f e g. No caso discreto, com $f = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ e $g = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ tem-se

$$c(f,g) = \sum_{i=1}^{n} y_i w_i$$

e, no caso contínuo,

$$c(f,g) = \int_0^T f(x)g(x)\,dx.$$

Quando as duas funções estão normalizadas (média zero e variância 1), $c(f,g)$ pode ser considerada uma medida da semelhança da forma do gráfico das duas funções.

A *Análise de Fourier* mede o peso de uma frequência, θ, na função f, efectuando a correlação entre a função f e uma sinusóide (um seno ou coseno) de frequência θ. As funções f e a sinusóide considerada podem estar 'desfazadas' e isso afectará o valor da correlação obtida. Em vez de se procurar a sinusóide que está mais 'em fase' com f, basta calcular as correlações com o seno e o coseno correspondentes à frequência θ e tomar a raiz quadrada da soma dos quadrados destas correlações.

Por vezes estamos interessados em conhecer não apenas quanto uma função oscila a uma dada frequência, mas também em que partes do seu domínio ela oscila a essa frequência. Uma analogia que se costuma utilizar consiste em não estar apenas interessado em saber quantas vezes é tocada uma determinada nota musical, numa sinfonia, mas também saber em que **momentos** essa nota musical é ouvida, durante a sinfonia. É esta a motivação para o surgimento das *wavelets*.

No entanto, existe um princípio de incerteza: não é possível obter simultaneamente uma resolução absoluta no tempo (a nossa variável x) e na frequência. O produto das variâncias, de uma função, no tempo e na frequência, é sempre maior ou igual a uma constante estritamente positiva. Essa constante é a mesma para qualquer função, desde que normalizada a sua escala. Uma *wavelet* será uma função que terá a sua energia 'centrada' num dado instante e numa dada frequência, mas a sua energia vai estar dispersa por um intervalo de tempo e por um leque de frequências.

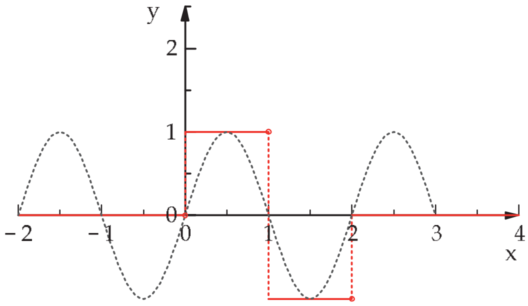

Figura 1: Sinusóide (cinzento) e a *wavelet* de Haar com a mesma frequência central (vermelho).

Efectuando a correlação de uma função $f(x)$ com a *wavelet*, $\psi(x)$, da figura, mediremos a presença da gama de frequências de ψ, na função f, na vizinhança de $x = 1$. Para medir a presença da mesma gama de frequências noutro ponto do domínio, $x = j$, usaremos uma translação de ψ, $\psi(x-j)$. A utilização da função $\psi(x/2^i)$, $i \in \mathbf{N}$ em vez de $\psi(x)$, permitirá detectar frequências da ordem da gama de frequências de ψ, dividas por 2^i. Assim a utilização de uma *wavelet* para a detecção de frequências está associada a um factor de escala, 2^i. Por esta razão quando se usam *wavelets* fala-se mais de *escalas* do que de frequências.

No que se segue efectuaremos a transformada *wavelet* de uma função. Usaremos, pela sua simplicidade, a *wavelet* de Haar, mas com outra *wavelet* o essencial não seria muito diferente.

Vamos identificar as nossas funções a um vector $(y_1, y_2, \cdots, y_8)$. A correspondentete *wavelet* de Haar é definida por um vector com todas as entradas iguais a zero, excepto duas consecutivas em que a primeira é 1 e a segunda -1.

Para efectuar a transformada *wavelet* necessitaremos, além da chamada *wavelet* 'mãe', da *função de escala* a ela associada. No caso da *wavelet* de Haar, a função de escala será representada por um vector com todas as entradas iguais a zero, excepto duas consecutivas iguais a 1. Como $8 = 2^3$ iremos considerar três escalas no nosso exemplo.

Para concretizar, seja $f_0 = (1, 1, 3, 4, -1, 2, 7, 0)$.

No primeiro passo, efectuaremos a correlação de f_0 com as *wavelets* $(1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1)$ e com as funções de escala $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$. O resultado será guardado num vector com a mesma dimensão: $f_1 = (0, -1, -3, 7, 2, 7, 1, 7)$. Os quatro primeiros coeficientes correspondem a diferenças de pares de elementos consecutivos e os últimos quatro correspondem a somas (médias, se fossem divididos por 2).

No segundo passo, alteraremos apenas os quatro últimos elementos do vector f_1. Eles representam o vector inicial f_1, depois de multiplicado por 2, a uma escala mais pequena, 1/2. O vector $(2, 7, 1, 7)$ será substituído pela correlação com as *wavelets* $(1, -1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, -1)$ e as funções de escala $(1, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 1)$. Desta forma obtemos o vector $f_2 = (0, -1, -3, 7, -5, -6, 9, 8)$.

Na escala 1/4 o vector inicial (depois de multiplicado por 4) é representado por $(9, 8)$. No terceiro passo, substituiremos estas duas entradas do vector f_2 pela sua correlação com a *wavelet* $(1, -1)$ e a função de escala $(1, 1)$, dando origem ao vector $f_3 = (0, -1, -3, 7, -5, -6, 1, 17)$. Reparemos que o último coeficiente, depois de dividido por 2^3, é a média do vector inicial f_0.

Todas as operações realizadas são reversíveis, pelo que podemos recuperar o vector inicial a partir da sua transformada *wavelet*.

A representação *wavelet* obtida no exemplo anterior tem o mesmo número de coeficientes da representação inicial: é uma representação minimal. De facto, a representação foi obtida a partir de uma família minimal de *wavelets*, uma família *ortogonal*. Este tipo de representação é usado, por exemplo, para compressão de dados: se não necessitássemos de todos os detalhes de f_0, poderíamos usar apenas os últimos quatro coeficientes de f_3 e com eles poderíamos reconstruir f_0 à escala 1/2.

Há situações em que é melhor utilizar uma representação redundante dos dados originais: é o caso se quisermos uma representação (quase) invariante por translação. Nesta situação utilizaremos uma família maior de *wavelets*, por exemplo, considerando todas as translações possíveis da *wavelet* original. Muitas vezes é isto que se faz quando se pretende localizar, num sinal, uma zona característica.

A quantidade de *wavelets* diferentes que existem está também associada às características que se pretende obter da representação *wavelet* e do tipo de funções (sinais) que se pretende representar. Se se pretender uma representação em que aos pontos de continuidade de uma função corresponda um número pequeno de coeficientes da transformada *wavelet*, de valor não desprezável, então a *wavelet* 'mãe' terá também de apresentar um certo grau de regularidade, o que não acontece com a *wavelet* de Haar.

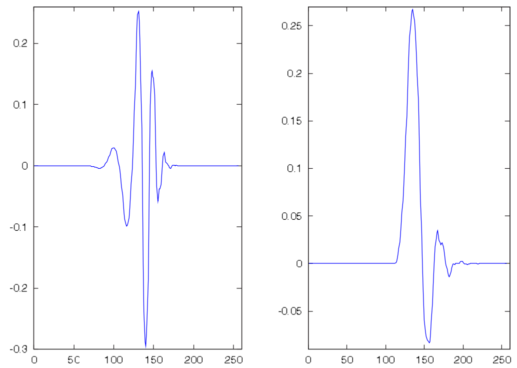

Figura 2: 'Wavelet mãe' Daubechies-10 (esq.) e função de escala associada (dta.)

Em seguida apresentamos um exemplo de utilização das *wavelets* em que se pretende eliminar uma perturbação correspondente a baixas frequências. Esta perturbação é localizada no tempo, pelo que a Análise de Fourier clássica não poderia ajudar.

Na Figura 3, esquerda, vê-se um electrocardiograma com *desvio da linha de base*. Trata-se de uma interferência na aquisição do sinal pretendido, o potencial eléctrico gerado no coração. Usando apenas as 6 últimas (de 16) escalas, obtemos as componentes de baixas frequências do sinal adquirido que constituem uma boa aproximação do desvio da linha de base (a vermelho).

Reconstruindo o sinal, depois de igualar a zero os coeficientes das 6 últimas escalas, conseguimos corrigir o desvio da linha de base (Figura 3, direita).

A utilização de *wavelets* não se limita a funções de uma variável. É vasto o conjunto de aplicações em dimensões maiores, o sistema de codificação de imagem JPEG2000 é disso um exemplo. Mas em dimensões maiores são necessárias outras famílias de funções, por exemplo, para obter uma boa aproximação, com um pequeno número de coeficientes não-nulos, para imagens que têm contornos ao longo de linhas regulares [1].

Existe uma larga bibliografia sobre este assunto, por isso faremos uma selecção, com base numa opção muito pessoal. Para uma apresentação global do assunto sugere-se [2], para uma introdução com maior ênfase nos sinais discretos, [3], e para uma apresentação feita por uma autora não matemática, realizada com base em entrevistas aos diversos matemáticos envolvidos no surgimento das *wavelets* [4].

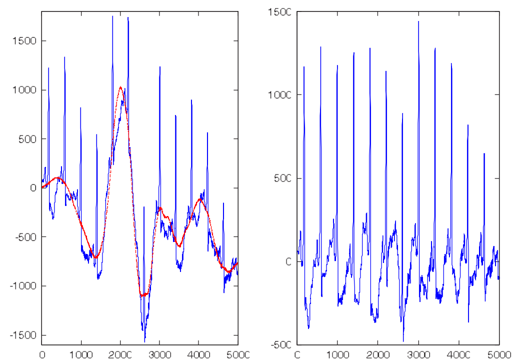

Figura 3: Esquerda, electrocardiograma com desvio da linha de base; Direita, correcção do desvio da linha de base.

REFERÊNCIAS

[1] E. Candès and D. Donoho. "New Tight Frames of Curvelets and Optimal Representations of Objects with Piecewise C2 Singularities". Comm. Pure Appl. Math., 57(2): págs. 219-266, 2004.

[2] Mallat, "A Wavelet Tour of Signal Processing The Sparse Way", Academic Press, 2009.

[3] Gilbert Strang and Truong Nguyen, "Wavelets and Filter Banks", Wellesley Cambridge Press.

[4] Barbara Burke Hubbard, "The World According to Wavelets: the Story of a Mathematical Technique in the Making", A. K. Peters, Wellesley. Massachusetts.

SOBRE O AUTOR

Rui Rodrigues é licenciado em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e doutorado em Matemática (equações diferenciais) pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. É docente do Departamento de Matemática da FCT/UNL desde 1984.