



Cirurgia Plástica do Ponto de Vista Matemático

GUEORGUI SMIRNOV^a E VERA SÁ^b

smirnov@math.uminho.pt, verasaz@gmail.com

^a UNIVERSIDADE DO MINHO, ^b UNIVERSIDADE DO PORTO

Este artigo contém uma apresentação elementar dos métodos matemáticos utilizados na modelação da cirurgia plástica e é destinado a um leitor não preparado. A exposição é feita com ênfase nos métodos numéricos e dá a possibilidade de conhecer um dos métodos principais da física matemática computacional, o método dos elementos finitos, algumas ideias da teoria de aproximação ligadas ao método, o conceito intuitivo de integral e os métodos directos do cálculo das variações.

1. INTRODUÇÃO

A cirurgia plástica é uma importante área da medicina que muitas vezes é erradamente identificada com a sua ínfima parte conhecida como cirurgia estética, porque esta é muito procurada pelas pessoas famosas para alterar o seu aspecto (enchimento dos lábios, implantes mamários, lipoaspiração, etc.). Na realidade, a maior parte das cirurgias plásticas, tais como cirurgia reconstrutiva, microcirurgia e tratamento de

queimaduras faz-se por indicação médica. Por exemplo, é absolutamente normal quando do bloco operatório sai uma equipa de oncólogos e entra de seguida uma equipa de cirurgões plásticos. Outro exemplo é o caso da cirurgia de redução mamária, que é recomendada pelo médico a quem tem problemas de coluna derivados do peso excessivo da mama. Muitas destas operações implicam intervenções substanciais e requerem uma preparação e uma planificação cuidadosas. Simular computacionalmente uma cirurgia plástica, ou seja, desenvolver e usar modelos matemáticos para a planificação pré-operatória e para a avaliação pós-operatória é um problema certamente de extrema importância pelo impacto positivo que tem neste campo da medicina, para melhor adequação dos procedimentos cirúrgicos aos casos individuais intervenionados e, consequentemente, para o aumento da qualidade de vida dos pacientes.

Embora a modelação matemática da cirurgia plástica tenha despertado a atenção de um número considerável de investigadores do mundo inteiro, o Problema Geral da Cirurgia Plástica (PGCP) foi introduzido há relativamente pouco tempo pelos autores deste artigo. Trata-se de um problema de cálculo variacional (uma parte da matemática que estuda mínimos e máximos de funções definidas em espaços de dimensão infinita) com condições de contorno não-convencionais, conhecidas como condições de sutura. Estas condições, no caso do PGCP, modelam a sutura de tecidos e são fundamentais para as simulações em cirurgia.

O objectivo deste artigo é dar uma apresentação elementar do PGCP destinada a um leitor não preparado. No âmbito desta apresentação vamos abordar o método numérico conhecido como o Método dos Elementos Finitos (MEF), algumas ideias da teoria de aproximação, conceito intuitivo de integral e os métodos directos do cálculo das variações. Os autores estão convencidos de que é mais fácil explicar os conceitos matemáticos básicos expondo ideias dos métodos numéricos, isto é, explicando como se calcula uma coisa ou outra, do que apresentar uma teoria matemática formal. Por isso, no artigo a ênfase é dada aos métodos computacionais e, para acompanhar os nossos raciocínios, não é necessário um vasto conhecimento matemático.

2. PROBLEMA GERAL DA CIRURGIA PLÁSTICA

Para que a exposição fique completa, incluímos também a formulação rigorosa do PGCP. Passemos à sua descrição. Do ponto de vista matemático, a deformação dos tecidos é descrita através da função de deformação f , que faz corresponder a um ponto p do corpo não deformado B o ponto $f(p)$ do corpo deformado $f(B)$. Os tecidos moles podem ser modelados constitutivamente como um material hiperelástico, ou seja, um material que satisfaz o axioma da termodinâmica de trabalho não-negativo num processo fechado. Neste modelo, a deformação é um minimizador da funcional que representa a energia elástica armazenada durante a deformação e a energia potencial gravítica do corpo. Designemos por W a densidade de energia de deformação e por Π a energia potencial gravítica de um elemento do corpo. Então os corpos elásticos na sua posição de equilíbrio assumem a configuração $f(B)$ que corresponde à energia total (de deformação e potencial),

$$\int_B W(\nabla f(p)) dp + \int_B \Pi(f(p)) dp, \quad (1)$$

mínima. Aqui ∇f é a matriz de Jacobi da aplicação f , isto é, a matriz cujos elementos são as derivadas $\partial f_i / \partial p_j$, $i, j = 1, 2, 3$. O corpo B , depois dos cortes feitos pelo cirurgião tem as seguintes fronteiras (ver figura 1):

1. Γ_1 é a parte em que o corpo está fixo;
2. Γ_2 é a parte do corpo que está exposta ao ar e que não sofre intervenção durante a cirurgia;

3. Γ_3 é constituída por duas partes da fronteira do corpo, resultantes do corte feito pelo cirurgião e que serão "costuradas", uma (Γ_+) à outra (Γ_-). Chamamos g à aplicação de identificação: um ponto p de Γ_+ é unido ao ponto $g(p)$ de Γ_- ;
4. Γ_4 é uma parte da fronteira que será unida a uma superfície fixa, por exemplo, a um osso.

Assim, temos as condições de contorno:

$$f(p) = p, \quad p \in \Gamma_1, \quad (2)$$

$$f(g(p)) = f(p), \quad p \in \Gamma_+, \quad (3)$$

$$\varphi(f(p)) = 0, \quad p \in \Gamma_4, \quad (4)$$

e onde $\Gamma_4 = \{x \mid \varphi(x) = 0\}$.

Agora, conhecendo o PGCP na sua forma rigorosa, passemos a uma apresentação informal dos métodos que são utilizados para a sua resolução.

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é baseado na ideia de que um corpo elástico de geometria complexa pode ser representado (aproximadamente) como uma união de corpos pequenos de geometria simples (elementos). Por exemplo, em dimensão 1, um grande segmento pode ser visto como união de pequenos segmentos. Em dimensão 2, podemos considerar que uma figura plana é formada por triângulos. Em dimensão 3, que um corpo é formado por tetraedros. A função de deformação f considera-se como afim nestes elementos,

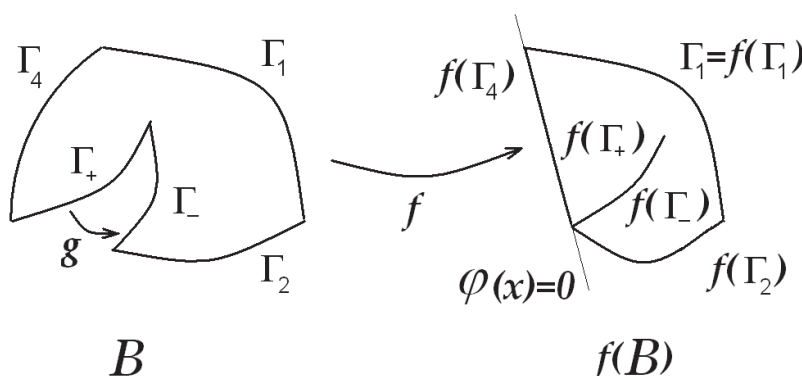


Figura 1: Esquema das fronteiras do corpo elástico antes e depois da sutura.

isto é, o seu gráfico é a translação de um pedaço de um subespaço. A construção desta função f baseia-se na ideia da assim dita partição da unidade, que é fundamental para a teoria de aproximação.

3.1. Partição da unidade

Expliquemos este conceito no caso de um conjunto de dimensão 2. Consideremos uma representação do corpo, \mathcal{B} , na forma de união de triângulos: $\mathcal{B} = \bigcup \tau_\alpha$. Cada τ_α tem três vértices: $v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, v_{\alpha_3}$. Seja v_β um vértice. Designemos por Ω_β o conjunto dos triângulos τ_α que têm v_β como vértice (ver figura 2). Os conjuntos Ω_β formam uma cobertura de \mathcal{B} . Consideremos a função Ψ_β definida assim: $\Psi_\beta(v_\beta) = 1$, é afim por partes em Ω_β . Se p pertence à fronteira de Ω_β , ou está fora de Ω_β , então $\Psi_\beta(p) = 0$. Estas funções formam uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{\Omega_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$, isto é

$$\Psi_\beta(p) \geq 0; \Psi_\beta(p) = 0, \quad p \notin \Omega_\beta$$

e

$$\sum_{\beta} \Psi_\beta(p) = 1, \quad \forall p \in \mathcal{B}.$$

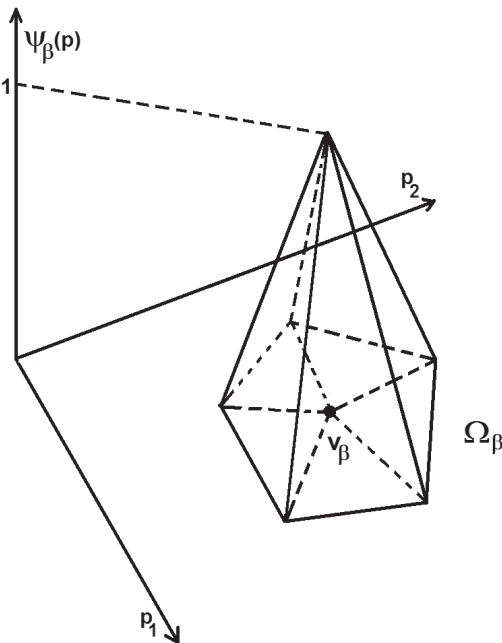


Figura 2: Função $\Psi_\beta(p)$.

A última igualdade é a consequência da observação de que a soma das funções Ψ_β é uma função afim que nos vértices dos triângulos toma valor 1.

3.2. Aproximação por funções afins por partes

Para explicar a ideia fundamental do MEF e da teoria de aproximação de funções, consideremos o problema de aproximação de uma função Lipschitziana $\phi(p), p \in \mathcal{B}$ por funções contínuas afins por partes. Recordemos que uma função é Lipschitziana se o módulo da diferença entre os valores desta função é menor ou igual à distância entre os pontos multiplicada por uma constante, $(|\phi(p_1) - \phi(p_2)| \leq L \text{dist}(p_1, p_2))$.

O diâmetro de Ω_β designa-se por $\text{diam}(\Omega_\beta)$ e é igual a $\sup_{p_1, p_2 \in \Omega_\beta} \text{dist}(p_1, p_2)$. Consideremos a aproximação:

$$\tilde{\phi}(p) = \sum_{\beta} \phi(p_\beta) \Psi_\beta(p),$$

onde $p_\beta \in \Omega_\beta$. (O gráfico desta função é uma superfície formada por pedaços planos.) Vamos ver qual é a diferença entre os valores de ϕ e $\tilde{\phi}$ num ponto. Utilizando as propriedades da partição da unidade, obtemos

$$\begin{aligned} |\phi(p) - \tilde{\phi}(p)| &= \left| \phi(p) - \sum_{\beta} \phi(p_\beta) \Psi_\beta(p) \right| \\ &= \left| \phi(p) \sum_{\beta} \Psi_\beta(p) - \sum_{\beta} \phi(p_\beta) \Psi_\beta(p) \right| \\ &= \left| \sum_{\beta} (\phi(p) - \phi(p_\beta)) \Psi_\beta(p) \right| \\ &\leq L \sum_{\beta} \text{dist}(p, p_\beta) \Psi_\beta(p) \leq L \sum_{\beta} \text{diam}(\Omega_\beta) \Psi_\beta(p) \\ &= L \max_{\beta} \text{diam}(\Omega_\beta) \sum_{\beta} \Psi_\beta(p) = L \max_{\beta} \text{diam}(\Omega_\beta). \end{aligned}$$

Seja $\sigma = \max_{\beta} \text{diam}(\Omega_\beta)$, então temos $|\phi(p) - \tilde{\phi}(p)| \leq L\sigma$. Daqui vemos que quando σ , o diâmetro máximo dos elementos da cobertura, tende para zero, a diferença entre a função e a sua aproximação $\tilde{\phi}$ tende para zero. O raciocínio que acabamos de fazer é tão importante que está presente (talvez de uma forma um pouco diferente) em quase todos os teoremas da teoria da aproximação.

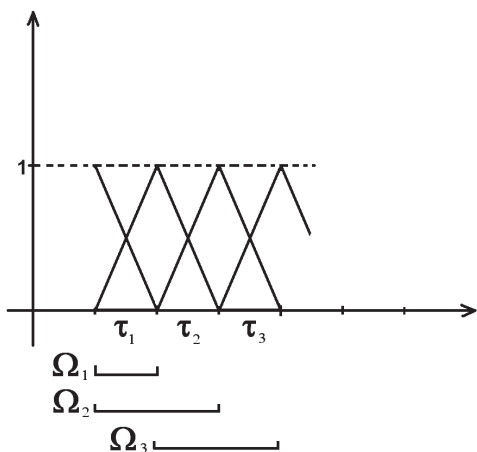


Figura 3: Cobertura de \mathcal{B} e partição da unidade no caso de dimensão 1.

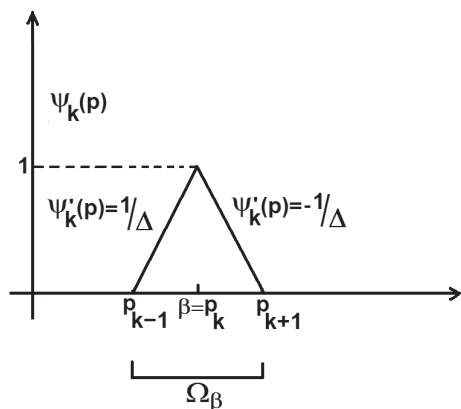


Figura 4: Função Ψ_k .

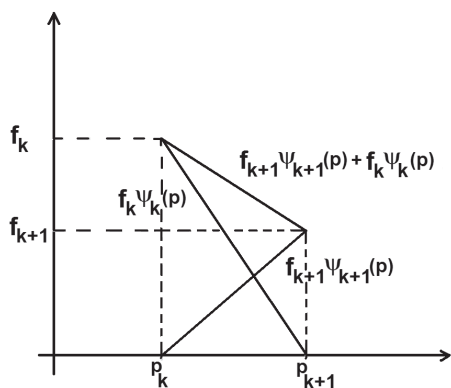


Figura 5: Como se constrói a aproximação de f .

3.3. MEF em dimensão 1

No caso de dimensão 1 os vértices $v_\beta = p_k$ são pontos $a = p_0, \dots, p_N = b$ da recta que verificam a condição $p_{k+1} - p_k = \Delta$. Os conjuntos $\mathcal{B} = [a, b]$, $\tau_\beta = [p_k, p_{k+1}]$ e $\Omega_\beta = [p_{k-1}, p_{k+1}]$ são segmentos, e a correspondente partição da unidade está nas figuras 3 e 4.

Para aplicar o MEF em dimensão 1, é necessário representar a função f como combinação linear das funções Ψ_k com coeficientes desconhecidos f_k ,

$$f(p) = \sum f_k \Psi_k(p),$$

(ver figura 5). Como vimos anteriormente, uma classe bastante larga de funções pode ser aproximada por funções deste tipo. A classe será tanto mais larga quanto mais geral for o conceito da distância entre a função e a sua aproximação.

4. PGCP EM DIMENSÃO 1

Para perceber o essencial deste artigo não é necessário o conhecimento do conceito de integral que aparece na formulação rigorosa do PGCP. Basta ter uma ideia intuitiva do integral e saber como se calcula.

No caso de dimensão 1, a funcional (1) toma a forma

$$\int_a^b W(f'(p)) dp + \int_a^b \Pi(f(p)) dp \quad (5)$$

e o conjunto \mathcal{B} é um segmento $[a, b]$, isto é, estamos a falar da deformação de uma corda (por exemplo, de guitarra). O valor da funcional (5), isto é, o integral, é necessário interpretar como limite das somas

$$\sum_{k=0}^{N-1} W(f_k \Psi'_k(p) + f_{k+1} \Psi'_{k+1}(p)) \Delta + \sum_{k=0}^{N-1} \Pi(f_k \Psi_k(p) + f_{k+1} \Psi_{k+1}(p)) \Delta, \quad (6)$$

quando Δ tende para zero e $N\Delta = b - a$. A função mais simples, W , que garante a existência de uma solução do PGCP é $W(f') = \frac{1}{2}(f')^2$. A função $f(p)$ descreve o deslocamento de corda no ponto $p \in [a, b]$. Para simplificar, consideremos $a = -1, b = 1$. Na posição não deformada, a corda é o segmento com extremos $(-1, g/2)$ e $(1, g/2)$ (linha horizontal na figura 6). Na posição deformada, e devido à acção da força da gravidade, a corda adopta

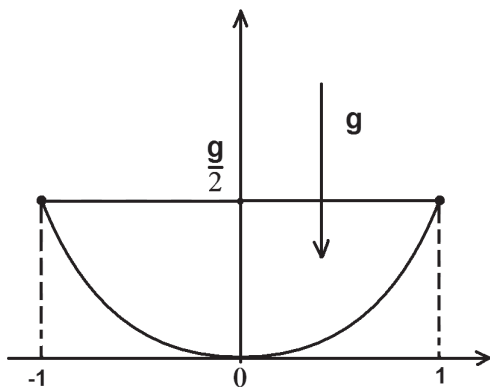


Figura 6: Deformação da corda.

a posição de menor energia, que é uma parábola (ver figura 6). Mostremos que a forma que a corda adopta é de facto uma parábola. A funcional (5) toma a forma

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (f'(p))^2 dp + g \int_{-1}^1 f(p) dp, \quad (7)$$

onde g é a aceleração gravítica. Consideremos a condição de sutura (condição 3 do PGCP): $f(-1) = f(1)$. Esta condição não é suficiente para garantir a existência da função f que minimiza a funcional (o ínfimo da funcional é $-\infty$). Adicionemos a condição de união à superfície fixa (condição 4 do PGCP): $f(0) = 0$. Então, pelo MEF e usando (6), a funcional (7) aproxima-se por

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-N}^{N-1} \left(\frac{f_{k+1} - f_k}{\Delta} \right)^2 \Delta + g \sum_{k=-N}^{N-1} f_k \Delta \quad (8)$$

com $f_0 = 0$, $f_{-N} = f_N$. A condição de mínimo desta função em relação a f_k para $k \neq 0, \pm N$ é obtida derivando (8) em ordem a f_k :

$$\frac{-f_{k+1} + 2f_k - f_{k-1}}{\Delta^2} + g = 0, \quad k \neq 0, \pm N. \quad (9)$$

Deste modo obtemos um sistema de equações para encontrar f_k , $k \neq 0, \pm N$. É fácil ver que $(k+1)^2 - 2k^2 + (k-1)^2 = 2$, portanto,

$$f_k = f(k\Delta) = \frac{g(k\Delta)^2}{2}.$$

é a solução do sistema (9). Passando ao limite quando Δ tende para zero e $N\Delta = 1$, obtemos a parábola

$$f(p) = \frac{gp^2}{2}.$$

5. A REDUÇÃO MAMÁRIA

Agora, quando já temos a ideia geral de como se modela uma cirurgia plástica, consideremos a intervenção cirúrgica conhecida como redução mamária, que é recomendada às mulheres que têm problemas de coluna derivados do peso excessivo da mama. Para a modelar aplicamos o MEF criando uma malha tridimensional que nos permite obter um modelo computacional realista da mama. A metodologia para modelar a redução mamária baseia-se em dois passos principais:

1. A reconstrução da mama no "estado neutro" e na determinação dos parâmetros elásticos do modelo.
2. A modelação da cirurgia e da subsequente recuperação.

Entenda-se por "estado neutro" o estado em que todas as forças (elásticas e de massa) são nulas. A existência deste estado é uma hipótese muito forte, e irrealista, contudo absolutamente necessária para a modelação. Os passos que seguimos para modelar a cirurgia de redução mamária são: a incisão dos tecidos a remover; a sutura dos tecidos; e a modelação da recuperação da mama. Este último passo consiste em anular as tensões que possam actuar no tecido e obter o estado neutro pós-cirúrgico. Todos os passos descritos são realizados no estado neutro. Portanto, para representar a previsão para a cirurgia em outros estados para além do estado neutro, por exemplo quando a paciente está de pé, temos de aplicar forças de massa ao estado neutro previamente obtido.

Uma das ideias-chave para este estudo é a determinação das propriedades elásticas baseando-nos na observação da deformação da mama como função da sua posição. Atendendo a que a geometria da mama se modifica de acordo com a posição adoptada pela paciente, foi desenvolvida a metodologia para determinar os parâmetros elásticos do modelo. Do ponto de vista matemático, a determinação dos parâmetros consiste na minimização da diferença entre o que é observado e o que é modelado. Por outras palavras, tomamos um número finito e características geométricas $G(f(\cdot, y))$ que obte-

mos como resultado da deformação $f(\cdot, y)$, que depende de um vector de parâmetros y na função $W = W(\nabla f, y)$. O ponto na notação $f(\cdot, y)$ significa que se trata da função $p \rightarrow f(p, y)$. Para além de G , tomamos o vector \hat{G} que é o resultado da

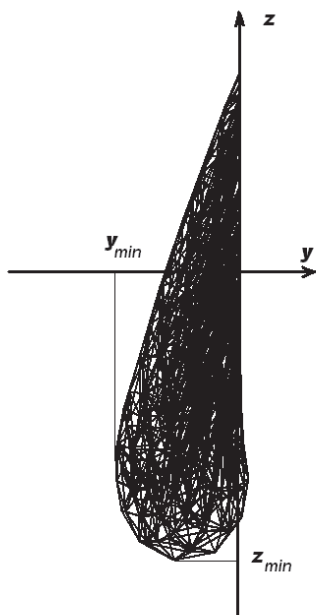


Figura 7: Modelação da mama original – posição vertical.

observação, por exemplo $\hat{G} = (y_{min}, z_{min})$ (ver figura 7). Para reconstruir o vector de parâmetros correspondente, \hat{y} , temos de resolver o problema de minimização

$$\text{dist}(\hat{G}, G(f(\cdot, y))) \rightarrow \min. \quad (10)$$

Usando esta metodologia conseguimos obter o modelo pré-operativo (ver figura 8b).

Antes da cirurgia de redução mamária o cirurgião desenha com um marcador, na pele da paciente, as linhas de incisão. Com estas é assinalado o reposicionamento do mamilo, tal como mostra a figura 9a. Na figura 9b ilustra-se a partir das linhas de incisão quais serão as partes cisadas que serão unidas uma à outra. A figura 9c mostra que outra das superfícies resultantes da incisão é unida ao tronco. O resultado da cirurgia é a solução do PGCP, onde \mathcal{B} é a mama incisada. A sua forma é determinada pelos parâmetros a e h (ângulo de incisão e distância do ponto D ao tronco, ver figuras 10 e 11). Baseando-nos nas linhas de incisão marcadas (ver figura 8a), consideramos que a mama tem um plano de simetria.

É aquele que passa perpendicularmente ao tronco atravessando o mamilo, dividindo a mama em duas partes iguais. Então, no estado neutro, imaginamos que a mama é uma porção de esfera com raio da base R e altura H (ver figura 10). Para a modelação da cirurgia de redução mamária realizamos apenas as experiências para metade da mama, devido à simetria (ver figura 8b). Além disso, não tomamos em consideração o pedículo do mamilo (ver figura 9a). Na figura 10, vemos o esquema de marcação da cirurgia de meia mama. Para estabelecer os planos de incisão ABD e BCD, estabelecem-se as posições dos pontos desde A a D, usando as medidas s (distância do ponto A ao centro da mama), d (distância do ponto C ao meio do plano horizontal da mama), a e h .

Aplicando diferentes tipos de incisões, alterando os parâmetros h e a , obtemos geometrias finais distintas (ver figura 12). Como é demonstrado na figura 13, resolvendo este problema podemos modelar com bastante precisão a forma da mama depois da cirurgia.

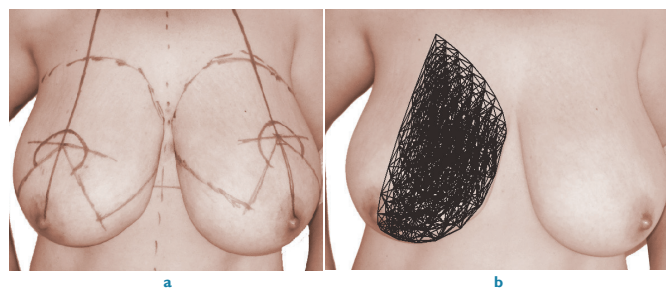


Figura 8: Marcas das linhas de incisão e modelo pré-operativo da mama.

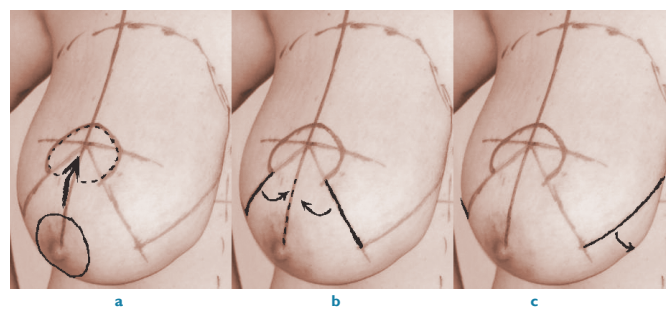


Figura 9: Esquema de incisão dos tecidos.

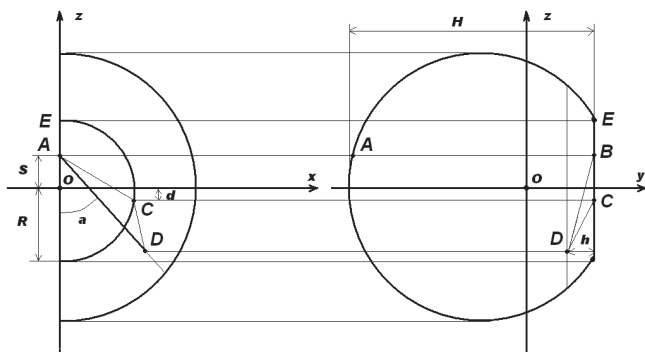


Figura 10: Esquema de incisão dos tecidos, dependendo dos parâmetros de incisão a , h e d .

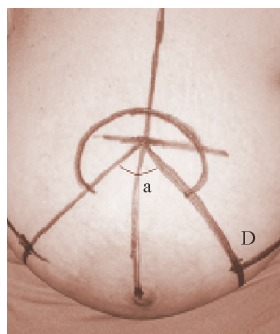


Figura 11: Ângulo a e ponto D.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo desenvolvido permite-nos simular diferentes resultados da redução mamária dependendo dos diferentes padrões de incisão. Mais especificamente, dependendo do valor do ângulo a e do valor da distância h aplicados na marcação pré-operativa, é possível prever a geometria final da mama, possibilitando-nos otimizar o resultado da cirurgia. No caso mostrado (figura 8), assumimos 6.8 para o parâmetro h e 45 graus para o parâmetro a , obtendo a forma da mama mostrada na figura 13. Essa figura dá a possibilidade de comparar o resultado da modelação com o caso clínico real.

A redução mamária é uma área cirúrgica complexa e os cirurgiões menos experientes podem enfrentar sérias dificuldades no processo de estimação e análise dos resultados da cirurgia. A aplicação de métodos computacionais possibilita a simulação da redução mamária com resultados plausíveis, e, além do planeamento pré-operatório, os simuladores deste tipo podem ser muito úteis para o treino dos jovens cirurgiões.

A história da cirurgia plástica pode ser conhecida através do livro [4]. O leitor interessado em conhecer a história do Cálculo da Variações (CV) e alguns métodos elementares de resolução do problema do CV baseados nas ideias físicas pode consultar o livro [6]. O leitor mais preparado pode ler o livro [5]. Como uma introdução aos métodos numéricos da física matemática podemos recomendar o livro [3].

Este artigo é uma apresentação mais acessível dos trabalhos [1, 7, 8, 2] que os autores desenvolveram em colaboração com os cirurgiões plásticos do Centro Hospitalar de Vila Nova de Gaia, Prof. Horácio Costa e Dra. Augusta Cardoso, e a quem mostram todo o seu apreço pela disponibilidade que lhes dedicaram. Um agradecimento a Alessandro Margheri, a Isabel Rodrigues e a Tatiana Tchemisova pelos comentários e sugestões.

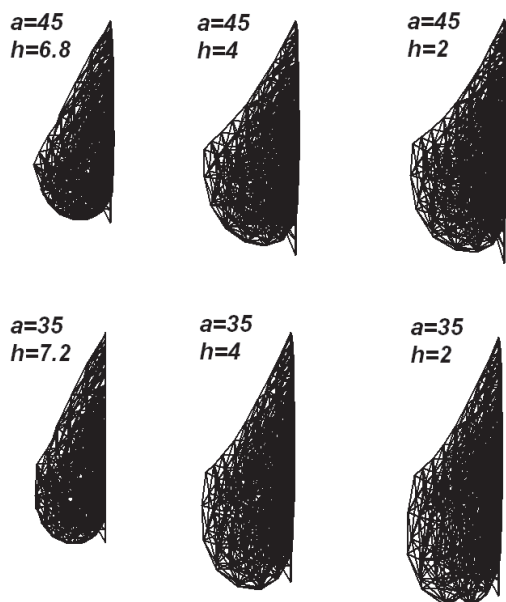


Figura 12: Resultados da cirurgia fazendo variar os parâmetros a e h .

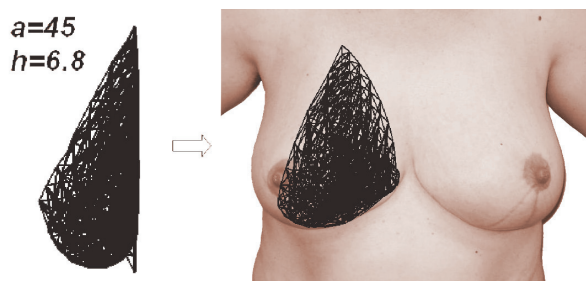


Figura 13: Modelo da mama obtido antes da cirurgia e comparação com a geometria final da mama depois da cirurgia.

REFERÊNCIAS

[1] Cardoso A, Smirnov G, Costa H, Sá V (2009) “Métodos Variacionais de Engenharia Biomecânica em Cirurgia Plástica de Tecidos Moles”. In: 5ª Conferência de Engenharia, Engenharia’ 2009 - Inovação e Desenvolvimento, Covilhã, 25 a 27 de Novembro, Portugal.

[2] Cardoso A, Costa H, Sá V, Smirnov G (2010) “On the importance of Chassaingnac’s space in breast modelling”. In: IV European Conference on Computational Mechanics, Paris, May, 16-21, France.

[3] Fletcher C. (1984) “Computational Galerkin Methods”, Springer-Verlag.

[4] Santoni-Rugiu P, Sykes J (2007) “A History of Plastic Surgery”, Springer-Verlag.

[5] Smirnov G, Bushenkov V (2005) “Curso de Optimização: Programação Matemática, Cálculo da Variações, Controlo Óptimo”. Escolar Editora.

[6] Smirnov G, Rodrigues I (2006) “Matemática: Origens e Aplicações”. Escolar Editora.

[7] Smirnov G, Sá V (2007) “Simulação Numérica da Cirurgia Plástica da Mama”. In: CMNE/CILAMCE 2007, Porto.

[8] Smirnov G, Sá V (2009) “Métodos de determinação dos parâmetros que influenciam os resultados da cirurgia plástica de redução mamária”. In: Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería 2009, Barcelona.

SOBRE OS AUTORES

Gueorgui Smirnov é licenciado em Matemática Aplicada pelo Instituto de Física e Tecnologia de Moscovo. Obteve o Doutoramento pela Universidade Estatal de Moscovo. Actualmente é professor na Escola de Ciências da Universidade do Minho e pertence ao Centro de Física da mesma Universidade.

Vera Sá é licenciada em Matemática Aplicada pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Actualmente é aluna de doutoramento da mesma Faculdade.



6º ENCONTRO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

28 a 31 de agosto de 2011
São João del-Rei, MG, Brasil

Coordenadores científicos:
Luis Saraiva (Universidade de Lisboa, Portugal)
Sergio Nobre (UNESP/Rio Claro, Brasil)
Coordenadora local:
Romélia Mara Alves Souto (UFSJ, Brasil)

informações
www.ufsj.edu.br/elbhm

