Palavras em Círculo

Diogo Pernes da Cunha
Universidade do Porto
diogo.pernes@fe.up.pt

Este artigo foi escrito no âmbito do Programa Novos Talentos em Matemática, da Fundação Calouste Gulbenkian

Dêem uma companhia ao solitário e ele falará mais do que qualquer pessoa.

Cesare Pavese

O *solitário búlgaro* é um jogo que se inicia com S objectos iguais distribuídos por n montes. Em cada jogada, de cada um destes montes é retirado um elemento, formando-se uma nova pilha com os objectos seleccionados. O objectivo do jogo é chegar, no menor número possível de jogadas, a uma posição em que há k montes de 1, 2, 3, …, $k-1$, k objectos, respectivamente, para algum natural k, considerada vencedora porque se repete nas jogadas seguintes. Naturalmente, isso só é possível se S for um número triangular. Contudo, para todo o natural S, cada jogada é uma forma de obter uma partição de S (isto é, um modo de escrever S como soma de n naturais) a partir de outra. É da dinâmica desta aplicação entre partições que nos ocuparemos neste texto.

Dada uma partição λ de S como soma de n naturais (n diz-se o *tamanho da partição*), se denotarmos por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, as partes de λ (ou seja, os tamanhos dos montes) ordenadas por ordem crescente, e se T é a transformação que descreve a jogada a partir de λ, teremos, excluindo os zeros que possam surgir, uma nova partição de S

$$T(\lambda) = \lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \ldots, \lambda_n - 1, n.$$

Por exemplo, se $S = 15$ e λ é a partição 1,2,3,4,5, então $T(\lambda) = 1, 2, 3, 4, 5$ (λ é um ponto fixo da aplicação T). Diremos que uma partição λ pertence a um ciclo de T se existir um natural k tal que $T^k(\lambda) = \lambda$, em que T^k designa a composição de T consigo mesma k vezes. Nesse caso, designaremos por *período de* λ, ou do ciclo, o menor natural k que satisfaz esta igualdade.

Vejamos alguns exemplos, com valores de S baixos, uma vez que o número de partições possíveis aumenta depressa com o valor de S. Se S=3, há exactamente três partições de S, nomeadamente 3, 1+2, 1+1+1; e, a partir destas posições iniciais, o jogo evolui como no esquema 1,1,1 $\to$ 3 $\to$ 1,2 $\to$ 1,2, sendo 1,2 um ciclo de período 1. Se S=4, o diagrama é 1,1,1,1 $\to$ 4 $\to$ 1,3 $\to$ 2,2 $\to$ 1,1,2 $\to$ 1,3, havendo um único ciclo, de período 3. Para S=5, temos 7 partições e T actua como no esquema seguinte

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & 5 & \to & 1,4 & \to & 2,3 & \to & 1,2,2 & \to & 1,1,3 & \to & 2,3 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & & & & & & \\
1,1,1,1,1 & & 1,1,1,2, & & & & & & & & &
\end{array}$$

terminando todas as jogadas num ciclo (único) de período 3. Se S=6, há 11 partições iniciais possíveis, um só ciclo de período 1 e o jogo é como se indica a seguir:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
6 & \to & 1,5 & \to & 2,4 & \to & 1,2,3 & \to & 1,2,3 & & & & \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & & & & & \\
1,1,1,1,1,1 & & 1,1,1,1,2 & & 1,1,1,3 & \leftarrow & 2,2,2 & \leftarrow & 3,3 & \leftarrow & 1,1,4 & \leftarrow & 1,1,2,2.
\end{array}$$

De modo análogo, é fácil completar a lista de jogadas possíveis para S=7 e S=8. No primeiro caso, há um único ciclo de período 4 (1,2,4 $\to$ 1,3,3 $\to$ 2,2,3 $\to$ 1,1,2,3); no segundo, há dois ciclos, um de período 2 (2,2,4 $\to$ 1,1,3,3) e outro de período 4 (1,3,4 $\to$ 2,3,3 $\to$ 1,2,2,3 $\to$ 1,1,2,4).

Notamos em todos estes exemplos que o jogo termina sempre num ciclo. E esta é, de facto, uma propriedade geral: uma vez que o número de partições de um natural qualquer S é finito, as jogadas conduzem necessariamente a uma repetição, e aí inicia-se o ciclo. O número de ciclos para cada valor de S varia bastante, mas é conhecida uma fórmula geral para esse número. Analisaremos aqui os períodos desses ciclos.

A tabela seguinte indica o número de ciclos e correspondentes períodos para cada S entre 1 e 20. Nela, e no que se segue, designaremos por $\{\Delta_n\}$ a sucessão dos números triangulares, de termo geral $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$, em que n é um número natural.

S	Número de Ciclos e Períodos
$\Delta_1 = 1$	Um ciclo de período 1
2	Um ciclo de período 2
$\Delta_2 = 3$	Um ciclo de período 1
4	Um ciclo de período 3
5	Um ciclo de período 3
$\Delta_3 = 6$	Um ciclo de período 1
7	Um ciclo de período 4
8	Um ciclo de período 2
9	Um ciclo de período 4
$\Delta_4 = 10$	Um ciclo de período 1
11	Um ciclo de período 5
12	Dois ciclos de período 5
13	Dois ciclos de período 5
14	Um ciclo de período 5
$\Delta_5 = 15$	Um ciclo de período 1
16	Um ciclo de período 6
17	Um ciclo de período 3
18	Um ciclo de período 2
19	Um ciclo de período 3
20	Um ciclo de período 6

O que é que conjecturamos a partir desta curta lista? Que há regularidade no número e nos períodos dos ciclos, a qual parece ser determinada pelos números triangulares sucessivos que delimitam a posição de S. Repare o leitor que, na tabela,

(a) se $S = \Delta_n$ para algum natural n, há apenas um ciclo de período 1;

(b) só para os números triangulares existe ciclo de período 1;

(c) para todo o S estritamente entre dois números triangulares consecutivos, digamos $\Delta_{n-1} < S < \Delta_n$, a aplicação T tem ciclo de período n;

(d) se S está imediatamente a seguir a Δ_{n-1} ou imediatamente antes de Δ_n, então a aplicação T tem um e um só ciclo, e ele é de período n.

As propriedades a) – d) acima são parte do guião que provaremos de seguida.

PRELIMINARES

Para todo o natural S, existem inteiros $n > 1$ e $0 \leq a \leq n-1$, únicos, tais que $\Delta_{n-1} \leq S < \Delta_n$ e $S = \Delta_n - a$. Dado S, consideremos n e a como anteriormente e fixemos um ciclo de período p. A sequência $\sigma = (\sigma_i)$ dos tamanhos das partições nesse ciclo também é um ciclo de período que divide p. As propriedades seguintes constam da referência [1] que, contudo, não dispensa a leitura de [2].

TEOREMA I: Sejam S, n e a como acima. Fixemos um ciclo de período p e a sequência σ dos tamanhos das partições nesse ciclo. Então:

a) determina o ciclo e tem também período p.
b) para todo o i, $\sigma_i \in \{n-1, n\}$.
c) p divide n.
d) $\lambda \in$ ciclo $\leftrightarrow \lambda : \delta_0, 1+\delta_1 \ldots, n-1+\delta_{n-1}$, sendo a valores dos δ_i's iguais a 0 e os restantes n – a iguais a 1.
e) o número de ciclos associados a S é dado por

$$C_a(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|(n,a)} \varphi(d) \binom{n/d}{a/d},$$

em que φ representa a função de Euler e (n,a) designa o máximo divisor comum de n e a.

Vejamos dois exemplos. Se σ: $\ldots 434343 \ldots$, então n=4 e p=2. Desta informação deduzimos que a partição inicial do ciclo é, digamos, a_1, a_2, a_3, a_4 (escrita por ordem crescente) e que, na primeira iteração do jogo, ela deverá reduzir-se a b_1, b_2, b_3. Logo, $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$. Assim, de $1, 1, a_3, a_4$ passamos a $a_3-1, a_4-1, 4$, que tem tamanho 3 desde que $a_3 \geq 2$. Desta partição, iterando de novo, obtemos $a_3-2, a_4-2, -, 3$, que, por ser p=2, tem de ser a partição inicial de tamanho 4. Logo, $a_3 = 3, a_4 = 3$ e S=8.

Consideremos agora S=12. Então, n=5, $\Delta_n = 15$ $a = 3$. A partição $\lambda : 1,2,2,3,4$ corresponde, na notação da alínea d) do Teorema 1, a $\delta_0 = 1, \delta_1 = 1, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0$ e $\delta_4 = 0$, sendo, como enunciado, três deles zero e dois iguais a um. E o mesmo se aplica às sucessivas imagens de λ por T, que listamos de seguida:

Órbita de λ	δ	σ
$\lambda : 1,2,2,3,4$	1,1,0,0,0	5
$T(\lambda) : 1,1,2,3,5$	1,0,0,0,1	5
$T^2(\lambda) : 1,2,4,5$	0,0,0,1,1	4
$T^3(\lambda) : 1,3,4,4$	0,0,1,1,0	4
$T^4(\lambda) : 2,3,3,4$	0,1,1,0,0	4
...	...	...

Note-se que, escrito o ciclo deste modo, é fácil resumir a acção de T: por cada iteração de T, δ_0 avança para a posição mais à direita e os restantes δ_i's são deslocados uma posição para a esquerda, como se rodassem numa circunferência. Ao fim de cinco iterados de T, δ_0 e os restantes δ_i's retornam à posição inicial, terminando o ciclo, que pode, por isso, ser visto como uma palavra circular formada por três 0s e dois 1s (que é σ se, em vez de 0s e 1s, usamos 4s e 5s). Assim, o número de ciclos associados a S=12 corresponde ao número de palavras circulares distintas que é possível construir com três 0s e dois 1s. Ora, para além de $1,1,0,0$, temos apenas mais uma possibilidade, $(1,0,1,0,0)$, uma vez que, sendo circulares, por exemplo $1,0,0,0,1$ ou $1,0,0,1,0$ não constituem ciclos novos. Pelo que, para S=12, temos exactamente 2 ciclos, e são de período 5. Convida-se o leitor a verificar que

$$\frac{1}{n} \sum_{d|(n,a)} \varphi(d) \binom{n/d}{a/d} = 2.$$

Detectamos na tabela anterior vários valores de S para os quais a dinâmica correspondente só tem um ciclo. Por exemplo, quando a=1 ou $a = n-1$, e sempre que S é triangular. De facto:

COROLÁRIO 1: *Dado um natural S, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) S é um número triangular.

(ii) Existe um (único) ciclo de período 1.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que S é um número triangular. Da fórmula da alínea e) do Teorema 1, concluímos que, sendo a=0, então

$$C_0(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) = 1$$

uma vez que

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

(veja-se [3], Teorema 63); isto é, só há um ciclo. Além disso, pela alínea d), qualquer partição λ desse ciclo único é da forma 1, 1 + 1, 2 + 1, … , n – 1 + 1, ou seja, 1, 2, …, n, de onde deduzimos que o período desse ciclo é 1.

Suponhamos agora que S tem partição $\lambda : \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que é ponto fixo de T. Podemos ordenar os elementos da partição por ordem crescente, digamos $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Então:

(i) Para que o tamanho da partição se mantenha por iteração de T, devemos ter $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 \geq 2$.

(ii) Para se obter $\lambda_1 = 1$ após a primeira jogada, tem de ser $\lambda_2 = 2$.

(iii) Analogamente, $\lambda_3 = 3$ para se obter $\lambda_2 = 2$.

(iv) Em geral, $\lambda_n = n$ para se que valha a igualdade $\lambda_{n-1} = n-1$.

Logo

$$S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

é triangular.

COROLÁRIO 2: Dado um natural S e correspondentes a e n, a dinâmica associada tem um único ciclo se e só se $a \in \{0,1,n-1\}$.

DEMONSTRAÇÃO: O caso a=0 foi tratado no corolário anterior. Se a=1 ou $a = n-1$, então o máximo divisor comum entre n e a é 1, e

$$C_1(n) = C_{n-1}(n) = \frac{1}{n}\binom{n}{n-1} = 1\,.$$

Reciprocamente, suponhamos que $a \notin \{0,1,n-1\}$. Então, uma vez que $0 \geq a \geq n-1$, devemos ter $n \geq 4$ e $a \geq 2$. Ora, pela alínea d) do Teorema 1, os ciclos possíveis correspondem a palavras com n dígitos do alfabeto {0,1} formadas com a letras iguais a 0 e as restantes $n-1$ iguais a 1. Como $a < n-1$, temos $n-a \geq 2$; e, portanto, podemos construir pelo menos duas palavras circulares distintas: uma com os $a \geq 2$ zeros consecutivos seguidos dos $n-a \geq 2$ uns; e outra em que há um 1 entre dois dos zeros.

Pretendemos agora obter informação sobre os períodos dos ciclos que o Teorema 1 conta. A tabela do início deste texto indicia que eles se relacionam com os valores de n e a. De que modo?

TEOREMA 2: Consideremos um natural n, um inteiro $0 \leq a \leq n-1$ e $S = \Delta_n - a$.

a) Se n é primo e S não é triangular, a aplicação T, ao actuar nas partições de S tem exactamente $\frac{1}{n}\binom{n}{a}$ ciclos e são todos de período n.

b) Para todo o $a \neq 0$, a aplicação T tem um ciclo de período n.

c) Se $n > 2$ é par, e $a = 2$ ou $a = n-2$, então T tem um ciclo de período $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}-1$ ciclos de período n, e só estes.

d) Se $n > 1$ é ímpar e $a = 2$ ou $a = n-2$, então T tem exactamente $\frac{n-1}{2}$ ciclos de período n.

DEMONSTRAÇÃO:

a)

Se S não é triangular, então, como vimos, nenhum ciclo pode ter período 1. Sendo n primo, uma vez que o período divide n, conclui-se que ele tem de ser igual a n. Além disso, como $1 \leq a \leq n-1$, o máximo divisor comum de n e a é 1, e portanto

$$C_a(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|(n,a)}\varphi(d)\binom{\frac{n}{d}}{\frac{a}{d}} = \frac{1}{n}\varphi(1)\binom{n/1}{a/1} = \frac{1}{n}\binom{n}{a}$$

(o que permite também concluir que se n é primo, então n divide todas as entradas interiores da n-ésima linha do triângulo de Pascal).

b)

Para $n = 1$, não há valores admissíveis de a verificando as duas desigualdades $0 < a \leq n-1$. Quando $n = 2$, devemos ter $0 < a \leq 1$, logo $a = 1$ e $S = \Delta_2 - a = 3-1 = 2$; neste caso, só há duas partições de S, nomeadamente 2 e 1 + 1, que formam ciclo de período 2. Consideremos agora n > 2 e, para $S = \Delta_n - a$ e $0 < a \leq n-1$, fixemos a partição definida por $B := \delta_0, 1+\delta_1, \ldots, n-1+\delta_{n-1}$, em que para $0 \leq i \leq n-1$,

$$\delta_1 \begin{cases} 1 & i \leq n-a-1 \\ 0 & n-a \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

contabilizando-se, em B, a valores de δ_i iguais a zero (a partir do índice $n-a$) e $n-a$ iguais a 1 (os primeiros, até ao de índice $n-a-1$). Note-se que, como $a \leq n-1$, temos $n-a-1 \geq 0$, e, portanto, o primeiro valor de B, isto é, δ_0, é sempre 1. Por exemplo,

- para $a = 1$ temos $B := 1,2,3,\ldots,n-1,n-1$;
- se $a = n-1$ então $B := 1,1,2,3,\ldots,n-1$;
- se $1 < a < n-1$ o valor (único) que se repete duas vezes seguidas é $n-1$, que é maior ou igual a 2, sendo $B := 1,\ldots,n-a,n-a,n-a+1,\ldots,n-1$.

Como

$$\sum_{i=1}^{n} B_i = (1+2+\ldots+n-1) + \sum_{i=0}^{n-1}\delta_i = \frac{n(n-1)}{2} + [n-a]\cdot 1 = \Delta_n - a = S,$$

confirmamos que B representa uma partição de S. Além disso, a alínea d) do Teorema 1 garante que B pertence a um ciclo. Resta-nos determinar o seu período.

Se o comprimento de todas as partições do ciclo a que B pertence fosse igual a n, pela alínea a) do Teorema 1, B teria de ser um ponto fixo de T, o que sabemos ser falso, uma vez que S não é triangular. Então, como, pela alínea b) do Teorema 1, se tem $\sigma_i \in \{n-1,n\}$, para todo o i, deduzimos que existe j tal que $\sigma_j = n-1$ (Note-se que B não é a partição correspondente a este tamanho, pois tem comprimento n.)

Aplicando T à partição B, os dois elementos que se repetem (mencionados acima) são subtraídos de uma unidade e deslocados uma posição para a esquerda (mantendo-se, por convenção, a ordem crescente na escrita da partição). Consequentemente, a partição $T^{n-a-1}(B)$ tem o número 1 nas duas primeiras posições, e portanto $T^{n-a}(B)$ tem comprimento $n-1$. Além disso, visto que todos os elementos do conjunto $\beta = \{n-a+1, n-a+2, \ldots, n-1\}$ pertencem a B, deduzimos que, pelo modo como T actua, todos os elementos de $\beta* = \{n-a+1-(n-a), n-a+2-(n-a), \ldots, n-1-/n-a)\}$, ou seja, do conjunto $\{1, 2, \ldots, a-1\}$ pertencem a $T^{n-a}(B)$.

Note-se que este conjunto é não vazio se e só se $1 < a$. Contudo, quando a=1 é fácil verificar que a partição $B := 1, 2, 3, \ldots, n-1, n-1$ tem período n, uma vez que
$T(B) = 1, 2, 3, \ldots, n-2, n-2, n;$
$T^2(B) = 1, 2, 3, \ldots, n-3, n-3, n-1, n;$
$T^3(B) = 1, 2, 3, \ldots, n-4, n-4, n-2, n-1, n;$
$T^{n-2}(B) = 1, 1, 3, \ldots, n-2, n-1, n;$
$T^{n-1}(B) = 2, 3, \ldots, n-2, n-1, n;$
$T^n(B) = 1, 2, 3, \ldots, n-3, n-2, n-1, n-1 = B$
e só neste n-ésimo iterado repetimos B.

Prossigamos agora com o argumento para os casos em que $1 < a$. Uma vez que B pertence a um ciclo de partições, é necessário que, iterando T, a partir de $T^{n-a}(B)$, se obtenha de novo B; e isso só pode acontecer quando estiverem completadas p iterações, sendo p o período do ciclo (cujo valor, recorde-se, procuramos). Ora, para se gerar uma partição de comprimento n a partir de uma outra de tamanho $n-1$, o número 1 não pode pertencer a esta partição – caso contrário, o monte com um só elemento desaparece, pelo que o tamanho se mantém. Mas, pelo que atrás se afirmou sobre $\beta*$, é garantido que 1 consta de $T^{n-a+j}(B)$ para todo o j tal que $0 \leq j \leq a-2$. O que significa que $T^k(B) \neq B$ para todo o $1 \leq k \leq n-2$. Logo $p \geq n-1$ e, portanto, restam-nos dois valores possíveis para p: ou $p = n-1$ ou $p = n$. Contudo, $n-1$ é primo com n e, como $n \geq 3$, o natural $n-1$ não é 1; logo, $n-1$ não divide n. Como, pela alínea c) do Teorema 1, p divide n, concluímos que $p = n$.

Observação: A partição B corresponde a uma palavra em círculo com $n-a$ dígitos iguais a 1 seguidos de $n-a$ iguais a zero. Como vimos, a acção de T pode ser lida como uma rotação dessa palavra numa circunferência até retornarmos à posição inicial. Nesta notação, é talvez mais fácil perceber que o período de B é n, isto é, que só ao fim de n deslocamentos para a esquerda é que os 1s iniciais voltam à posição em que estão perfilados juntos. Mas o argumento anterior elucida outros aspectos da dinâmica de T, e por isso o incluirmos.

c)
Consideremos n par, maior ou igual a 4, e $S = \Delta_n - 2$. (A análise para $S = \Delta_n - [n-2]$ é dual da que iremos apresentar, bastando trocar no argumento que se segue 0s por 1s.) Comecemos por observar que, como $n \geq 4$, se pode ter $a = 2$ (ou $a = n-2$) sem que S seja triangular (ou seja, sem que $n-2=0$). Pela alínea d) do Teorema 1, os ciclos possíveis podem escrever-se como palavras circulares com n dígitos de {0,1}, sendo a letras iguais a 0 e as restantes $n-a$ iguais a 1, que podemos etiquetar pelo número de 1s entre os dois 0s. É o que se indica na tabela seguinte:

Palavra circular	Número de 1s entre os dois 0s
0, 0, 1, …, 1	0
0, 1, 0, 1, …, 1	1
0, 1, 1, 0, 1, …, 1	2
0, 1, 1, 1, 0, 1, …, 1	3
	…
0, 1, …, 1, 0, 1, …, 1	$\frac{n-2}{2}$

Por serem palavras circulares, a contagem termina quando se tem $\frac{n-2}{2}$ 1s entre os 0s. Na coluna da direita, contabilizamos precisamente $\frac{n-2}{2}+1 = \frac{n}{2}$ ciclos. Observe-se que as primeiras $\frac{n}{2}-1$ partições indicadas na coluna da esquerda apresentam um número de 1s à esquerda do segundo 0 diferente do número de 1s à direita deste. Como tal, são necessários n deslocamentos para completar um ciclo, ou seja, o período é n. Contudo, para a última palavra, $0, 1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, 1,$ temos $\frac{n-2}{2}$ 1s à esquerda e igual número de 1s à direita do segundo 0, pelo que a sequência $0, 1, \ldots, 1$ surge repetida, e o período desta palavra é $\frac{n}{2}$.

d)
Analisemos agora o caso em que n é ímpar e a=2 (ou $a = n-2$), por argumento semelhante ao da alínea anterior.

Consideremos uma partição que pertença a um ciclo, digamos uma palavra com n dígitos do alfabeto $\{0,1\}$ com a 0s e $n-a$ 1s. No caso particular de n=3, há só uma palavra disponível com estas características, nomeadamente $0,0,1$, e ela representa o único (veja-se o caso $a=n-1$ do corolário 2) ciclo da transformação T quando $S=\Delta_3-2=4$, e que já sabemos que tem período 3. Em geral, há mais palavras possíveis, as que listamos na tabela seguinte – que, por serem palavras circulares, está completa – onde destacámos o número de 1s entre os dois 0s:

Palavra	Número de 1s entre os 0s
0, 0, 1, …, 1	0
0, 1, 0, 1, …, 1	1
0, 1, 1, 0, 1, …, 1	2
…	
0, 1, …, 1, 0, 1, …, 1	$\frac{n-3}{2}$

Ora, como n é ímpar, a última palavra da tabela tem $\frac{n-3}{2}$ dígitos iguais a 1 a seguir ao primeiro 0 e $\frac{n-1}{2}$ dígitos iguais a 1 depois do segundo 0. Neste contexto, já não surgem palavras com igual quantidade de 1s antes e depois dos 0s. Assim, concluímos que existem $\frac{n-3}{2}+1=\frac{n-1}{2}$ ciclos, todos de período n.

Estamos em condições de aumentar a tabela inicial sobre ciclos e períodos. Para S=21 e S=28, por serem triangulares (Δ_6 e Δ_7, respectivamente), temos, para cada um deles, um e só um ciclo de período 1. O próximo grupo de valores de S, entre 21 e 28, corresponde a um natural n primo, 7, e portanto só surgirão ciclos de período 1 ou 7. Se $S=22=\Delta_7-(7-1)$, ou o dual $S=27=\Delta_7-1$, que não são triangulares, temos um só ciclo de período 7. Quando $S=23=\Delta_7-(7-2)$, ou $S=27=\Delta_7-2$, há $\frac{7-1}{2}=3$ ciclos de período 7. Sobre $S=24=\Delta_7-(7-3)$ ou $S=25=\Delta_7-3$, os resultados anteriores são omissos. Contudo, como são números não triangulares e 7 é primo, só podem ter ciclos de período 7. Quantos? Basta utilizar a fórmula dada pelo Teorema 1 para o saber:

$$C_4(7)=\frac{1}{7}\sum_{d|(7,4)}\varphi(d)\binom{7/d}{4/d}=\frac{1}{7}\cdot 1\cdot\binom{7}{4}=5=\frac{1}{7}\cdot 1\cdot\binom{7}{3}=C_3(7).$$

Como vimos, nem todas as partições pertencem a ciclos. Tanto quanto sabemos, é ainda uma questão em aberto o número máximo de jogadas para que uma partição chegue a um ciclo; no caso de S ser triangular, digamos $\frac{k(k+1)}{2}$, esse máximo é $k(k-1)$ (detalhes em [4]).

REFERÊNCIAS

[1] J. Brandt, "Cycles of Partions", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol.-85, 483-486 (1982)

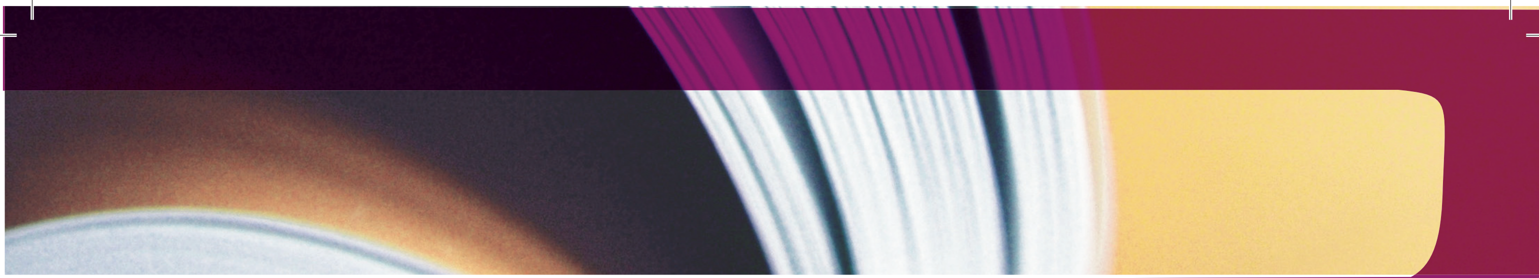
[2] E. Akin, M. Davis, "Bulgarian Solitaire", *American Mathematical Monthy* 92 (1985) 237-50

[3] G. Hardy, E. Wright, "An Introduction to the theory of Numbers", Oxford University Press (1979)

[4] K. Igusa, "Solution of the Bulgarian Solitaire Conjecture", *Mathematics Magazine*, vol. 58, nº5, 259-271 (1985)

SOBRE O AUTOR

Diogo Pernes Cunha é estudante do ramo de Telecomunicações do Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Foi bolseiro do Programa Novos Talentos em Matemática da Fundação Calouste Gulbenkian em 2009/10 e 2010/11.



PONTO CRÍTICO

COORDENAÇÃO DE
DANIEL PINTO
Universidade de Coimbra

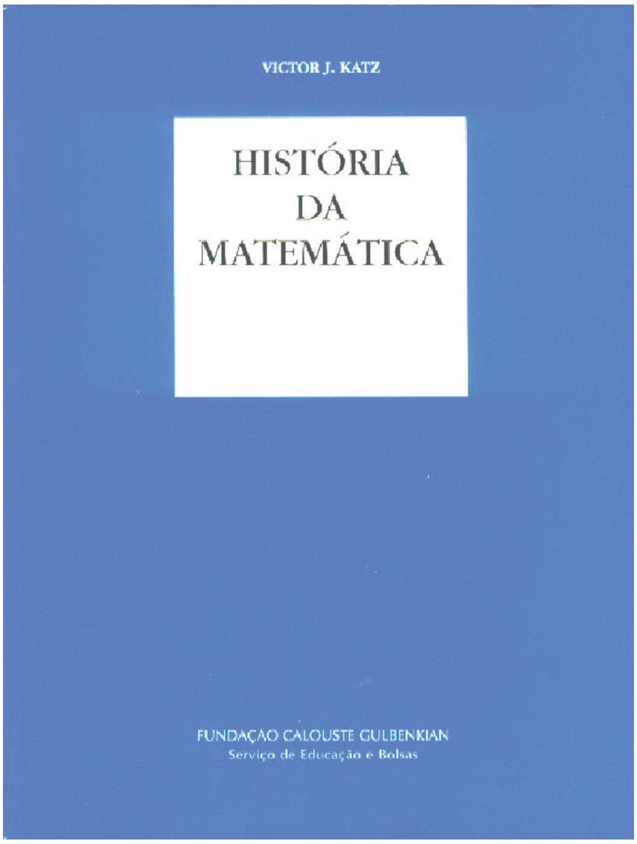
A *HISTÓRIA DA MATEMÁTICA* LEVADA A SÉRIO

A *História da Matemática* de Victor J. Katz é a melhor introdução, num só volume, ao estudo sério do desenvolvimento histórico da matemática. "Introdução" pode parecer um exagero ou até uma piada quando se está a falar de uma obra enorme, com mais de 1100 páginas, que impressiona só pela largura da lombada. Mas é mesmo só de uma introdução que se trata e se há uma crítica a fazer aos responsáveis pela versão portuguesa é a de que foi pena que essa clarificação, que faz parte do título original – *A History of Mathematics. An Introduction* – não tivesse sido mantida no título português.

Uma introdução, portanto, mas que introdução! Numa prosa clara e agradável, Victor Katz analisa e explica com todo o rigor conceitos, ideias e técnicas matemáticas desde a Antiguidade mais remota até quase aos dias de hoje. São raríssimos os historiadores capazes de tratar com saber e equilíbrio períodos que se estendem por alguns séculos, um feito que Katz consegue com uma facilidade surpreendente. O autor mostra não apenas uma enorme erudição, mas sobretudo um bom senso e um sentido de proporção a toda a prova.

O leitor que se acometa à tarefa de ler este livro do princípio ao fim ficará com um conhecimento invejável da história da matemática, o que lhe permitirá dar o passo para investigações mais detalhadas, seguindo porventura as sugestões que o próprio Victor Katz oferece. A esmagadora maioria dos leitores, contudo, não usará o livro desta forma, preferindo consultá-lo pontualmente, para conhecimento de algum período, algum matemático ou algum assunto, mas mesmo assim terá nesta *História da Matemática* uma das mais seguras e completas obras de referência sobre o tema.

O livro está dividido em quatro partes que se desenrolam em sequência cronológica, começando na Antiguidade e chegando até o século XX: 1.A matemática antes do século VI; 2. A matemática medieval, 500-1400; 3. Os primórdios da matemática moderna, 1400-1700; 4. Matemática moderna, 1700-2000. O tratamento é, portanto, cronológico, mas dentro de cada período temporal há uma tentativa de arrumação temática (geometria, álgebra, análise combinatória, etc.), o que permite em certa medida uma leitura temática do livro.



Victor J. Katz, "História da Matemática" (Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010), 1117 pp.

Escrito no espírito de um livro de texto, esta *História da Matemática* tem como leitores ideais "alunos do ensino superior que tencionem vir a ensinar em escolas secundárias ou universidade" (p. xiii), mas naturalmente este conceito deve