



Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações*

CHRISTIANE ROUSSEAU
Université de Montréal

*Traduzido do artigo "Banach Fixed Point Theorem and Applications", de acesso livre e originalmente publicado em <http://www.kleinproject.org/> como uma *Klein vignette*, a tradução foi gentilmente autorizada pela autora e pelo ICMI. Tradução de Rogério Martins

Nesta *Klein vignette*, mostramos como a partir de um pequeno jogo podemos descobrir um dos teoremas mais poderosos da matemática, o teorema de ponto fixo de Banach. Este teorema tem aplicações fantásticas dentro e fora da matemática. No ponto 4, falamos sobre uma aplicação fascinante na compressão da imagem.

1. INTRODUÇÃO

Vamos começar com o nosso jogo e olhar para a tampa da famosa caixa de A Vaca que Ri (Figura 1). O brinco da direita da vaca é, mais uma vez, uma vaca que ri. A cada ponto da tampa, associamos o ponto correspondente no brinco à direita. Esta é, claramente, uma função da tampa para si própria, a que chamaremos F . Por exemplo, à ponta do queixo da vaca associamos a ponta do queixo da pequena vaca no brinco da direita. Ao centro do olho direito da vaca associamos o centro do olho direito da pequena vaca no brinco da direita, etc. Aqui está o desafio: **há algum ponto que seja enviado para si próprio por este processo?** Um tal ponto, se existir, será chamado *ponto fixo*. Se existe um ponto fixo, então não é nenhum dos pontos que enumerámos acima. Além disso, se existe um ponto fixo, então ele deve estar no brinco da direita. Mas o brinco da direita é enviado para o brinco da direita da vaca pequena, etc. Visualmente, vemos que estes brincos da direita encaixados parecem convergir para um ponto, a que chamamos A , e A é um candidato para a nossa solução.

Começemos com um ponto qualquer, por exemplo a ponta do queixo, ao qual vamos chamar P_0 . Assim, P_0 é enviado para



Figura 1: A famosa embalagem da Vaca que Ri.

$P_1 = F(P_0)$, que é a ponta do queixo da pequena vaca no brinco da direita. Analogamente, P_1 é enviado para $P_2 = F(P_1)$, que é a ponta do queixo da vaca que aparece no brinco da direita da pequena vaca, etc. Observamos três coisas:

(i) Poderíamos continuar o processo um número infinito de vezes e gerar uma sucessão $\{P_n\}$, onde $P_{n+1} = F(P_n)$.

(ii) Visualmente, só um número finito de pontos desta sucessão parecem distintos, todos os outros não se distinguem. Claro que poderíamos ampliar a imagem e ver mais pontos. Contudo, independentemente da ampliação que escolhermos, continuamos a distinguir só um número finito de pontos e os restantes não se distinguem.

(iii) Esta sucessão parece convergir para o mesmo ponto A como antes.

Se tivéssemos considerado um outro ponto Q_0 e construíssemos a sucessão $\{Q_n\}$, onde $Q_{n+1} = F(Q_n)$, veríamos que a sucessão $\{Q_n\}$ aparentemente convergiria para o mesmo ponto A . De facto, podemos observar que isto é consequência do facto de o ponto $\{A\}$ ser a intersecção dos brincos da direita encaixados, cujos diâmetros tendem para 0.

O que é que o teorema do ponto fixo de Banach nos diz? Diz-nos que, de facto, a função F tem um único ponto fixo, i.e., existe um único ponto A do plano tal que $F(A) = A$. Além disso, também afirma que se tomarmos um ponto qualquer P_0 e construirmos a sucessão $\{P_n\}$, onde $P_{n+1} = F(P_n)$, então a sucessão $\{P_n\}$ converge para A .

Mas porquê? Será que o mesmo ocorreria para qualquer função F ? Claro que não. Por exemplo, uma translação no plano não tem um ponto fixo. Por outro lado, a aplicação $G(x, y) = (x + (x^2 - 1)' - y)$ tem dois pontos fixos $(\pm 1, 0)$. A aplicação F do nosso jogo tem uma propriedade especial. É uma *contração*. De facto, o seu contradomínio é muito mais pequeno do que o domínio. Se dois pontos P e Q estão a uma certa distância, então as suas imagens $F(P)$ e $F(Q)$ estão mais perto uma da outra do que P e Q estavam. Esta afirmação faz sentido porque em \mathbb{R}^2 podemos medir a *distância* entre dois pontos. Isto porque \mathbb{R}^2 é um *espaço métrico*. É o facto de F ser uma contração que garante que quando construimos uma sucessão $\{P_n\}$, independentemente da precisão que conside-

remos (olhemos a sucessão de longe, de perto, com um microscópio, ou através de um microscópio electrónico), depois de um N que depende da nossa precisão, todos os elementos da sucessão $P_n, n > N$ se tornam indistinguíveis. Dois elementos são distinguíveis se a distância entre eles está acima de um certo valor. Na próxima secção vamos recordar que a uma sucessão que tenha esta propriedade se chama uma *sucessão de Cauchy*. Em \mathbb{R}^2 , qualquer sucessão de Cauchy é convergente. Dizemos que \mathbb{R}^2 é um *espaço métrico completo*.

2. O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

Agora que temos todos os ingredientes para o caso geral, podemos formular o teorema.

Teorema 2.1 (Teorema do ponto fixo de Banach) *Seja \mathcal{K} um espaço métrico completo onde a distância entre dois pontos P e Q é representada por $d(P, Q)$. Consideremos $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ uma contração, i.e., existe $c \in (0, 1)$ tal que se $P, Q \in \mathcal{K}$, então*

$$d(F(P), F(Q)) \leq c d(P, Q).$$

Então F tem um único ponto fixo, i.e., existe um único ponto $A \in \mathcal{K}$ tal que $F(A) = A$.

Vamos de seguida definir todos os termos que constam nesta formulação. Esta parte é mais formal e pode ser saltada se preferir concentrar-se nas aplicações.

Sabemos o que é a distância entre dois pontos P e Q em \mathbb{R}^2 . Como é que podemos generalizar esta ideia num conjunto \mathcal{K} ?

Definição 2.2

A distância num conjunto \mathcal{K} é uma função $d : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica:

1. Para cada $P, Q \in \mathcal{K}, d(P, Q) \geq 0$;
2. $d(P, Q) = 0$ se e só se $P = Q$;
3. Para cada $P, Q, R \in \mathcal{K}, d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$ (desigualdade triangular).

Como sabemos, estas propriedades são verificadas para a distância euclidiana usual em \mathbb{R}^2 .

Recordamos agora a definição de sucessão de Cauchy, que é a formalização da ideia de uma sucessão para a qual, independentemente do limite de precisão que tomarmos, depois de um número finito de elementos, todos os outros se tornam

indistinguíveis. Vamos ainda recordar a definição de sucessão convergente.

Definição 2.3

1. Uma sucessão $\{P_n\}$ de elementos num espaço métrico \mathcal{K} é uma *sucessão de Cauchy* se para todo o $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N$, temos

$$d(P_n, P_m) < \epsilon.$$

2. Uma sucessão $\{P_n\}$ de elementos de um espaço métrico \mathcal{K} converge para o limite $A \in \mathcal{K}$ se para todo o $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo o $n > N$, temos

$$d(P_n, A) < \epsilon.$$

Definição 2.4

Um espaço métrico \mathcal{K} é um *espaço métrico completo* se qualquer sucessão de Cauchy $\{P_n\}$ de elementos de \mathcal{K} converge para um elemento A de \mathcal{K} .

Como é que provamos o teorema do ponto fixo de Banach? A unicidade do ponto fixo é fácil. De facto, suponhamos que A e B são dois pontos fixos. Então, $F(A) = A$ e $F(B) = B$. Além disso, como F é uma contração, temos

$$d(F(A), F(B)) \leq c d(A, B),$$

logo, $d(A, B) \leq c d(A, B)$.

A única solução é $d(A, B) = 0$, o que nos leva a concluir que $A = B$.

Tal como para a unicidade, a ideia da demonstração da existência também é simples: já a vimos no nosso jogo da Vaca que Ri! Consideramos um ponto qualquer $P_0 \in \mathcal{K}$ e construímos (como antes) a sucessão $\{P_n\}$, onde $P_{n+1} = F(P_n)$. Então, esta sucessão é uma sucessão de Cauchy e o seu limite é um ponto fixo. Claro que mostrar estas duas afirmações requer algum trabalho, mas vamos saltar os detalhes técnicos. O que é importante é que a demonstração é a mesma, no caso geral de um espaço métrico completo complicado ou num simples tal como $\mathcal{K} = \mathbb{R}$.

A ideia da demonstração é não só simples e intuitiva, mas também bastante poderosa. Ela providencia-nos uma forma de construir numericamente o ponto fixo A . Isto explica por-

que é que podemos encontrar inúmeras aplicações deste teorema, tanto na vertente teórica como na vertente prática.

3. APLICAÇÕES EM ANÁLISE

Uma das aplicações mais importantes do teorema do ponto fixo de Banach é a demonstração da existência e da unicidade de solução para uma equação diferencial suficientemente regular. Nesta aplicação o espaço métrico completo \mathcal{K} é um conjunto de funções e a aplicação F transforma uma função numa outra função (por vezes, dizemos que F é um *operador*). O truque está em mostrar que uma solução da equação diferencial, se existir, é um ponto fixo do operador F .

Provavelmente, já estudou equações diferenciais simples e aprendeu truques para encontrar fórmulas para as soluções. Na verdade, estas equações diferenciais são a excepção. Para a maioria das equações diferenciais não existe uma fórmula para as soluções. Daí a importância de um teorema que assegure a existência de solução. Não deveria ficar surpreendido por não existir uma fórmula para as soluções da maioria das equações diferenciais. De facto, considere uma das equações diferenciais mais simples

$$y' = e^{-x^2}.$$

A sua solução é dada por

$$y = \int e^{-x^2} dx.$$

Deve lembrar-se de lhe terem dito no seu curso de probabilidades ou estatística que não existe uma fórmula para a primitiva da função e^{-x^2} , explicando assim porque é que temos de trabalhar com tabelas quando estudamos a distribuição normal.

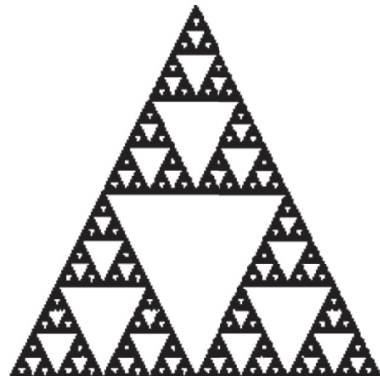
4. APLICAÇÕES À COMPRESSÃO DE IMAGEM

A melhor forma de guardar uma imagem em memória é guardar a cor de cada píxel. Há dois problemas neste método:

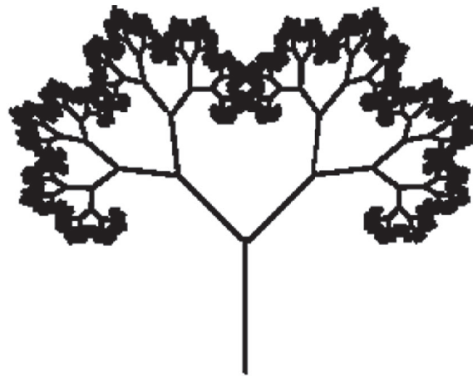
- Requer uma enorme quantidade de memória.
- Se tentarmos ampliar a imagem, por exemplo, para a usar num grande póster, os píxeis tornam-se quadrados maiores e vai faltar-nos informação sobre como preencher os detalhes nestes quadrados.



(a) Feto



(b) Triângulo de Sierpiński



(c) Árvore

Figura 2: Três Fractais

Qual é o princípio da compressão de imagem? É o de codificar menos informação do que há na imagem original, mas fazendo-o de uma forma inteligente, para que a olho não consigamos ver que a imagem que observamos foi deteriorada. A Internet aumentou a necessidade de uma boa compressão de imagem. De facto, as imagens tornam significativamente mais lenta a navegação na rede. Assim, para a navegação na Internet é bom ter imagens codificadas em ficheiros o mais pequenos possível. Quando olha para a imagem no ecrã do seu computador não consegue ver que foi deteriorada. Contudo, se tentar ampliá-la ou usá-la num póster, vai ver imediatamente que tem pouca qualidade.

Há vários princípios de compressão de imagem, um dos mais familiares é o formato JPEG, que se tornou *standard* para fotos digitais. A codificação de uma imagem no formato JPEG é também um algoritmo matemático.

Nesta *Klein Vignette*, vamos concentrar-nos noutra método que se manteve mais experimental. A este método, introduzido por Barnsley, tem-se chamado *sistemas de funções iteradas*. A ideia por detrás do método é aproximar uma imagem por objectos geométricos. Para ter uma quantidade suficiente de objectos disponíveis, não vamos limitar-nos às figuras geométricas usuais, que são as linhas e curvas suaves, mas

vamos permitir objectos fractais complicados, como o feto e o triângulo de Sierpiński (ver figura 2).

Vamos explicar a ideia do processo de compressão no triângulo de Sierpiński da figura 2(b). Parece *a priori* um objecto complicado. Como guardá-lo na memória de um computador, de uma forma económica? O melhor é guardar um programa que o reconstrua quando for necessário. Para construir este programa, precisamos de entender o que caracteriza este objecto geométrico. Vamos observar o triângulo de Sierpiński: ele é a união de três triângulos de Sierpiński (i.e., três cópias dele próprio), que têm metade do seu tamanho (em largura e altura). De facto, partindo do triângulo de Sierpiński, podemos construir um segundo usando o seguinte procedimento:

- Encolhemos o triângulo de Sierpiński para metade do seu tamanho a partir do seu vértice inferior esquerdo.
- Construimos uma segunda cópia deste meio triângulo de Sierpiński e colamo-la à direita.
- Construimos uma terceira cópia deste meio triângulo de Sierpiński e colamo-la no topo.

A segunda figura que construimos é igual ao nosso triângulo de Sierpiński original. Assim, o triângulo de Sierpiński é o ponto fixo do processo.

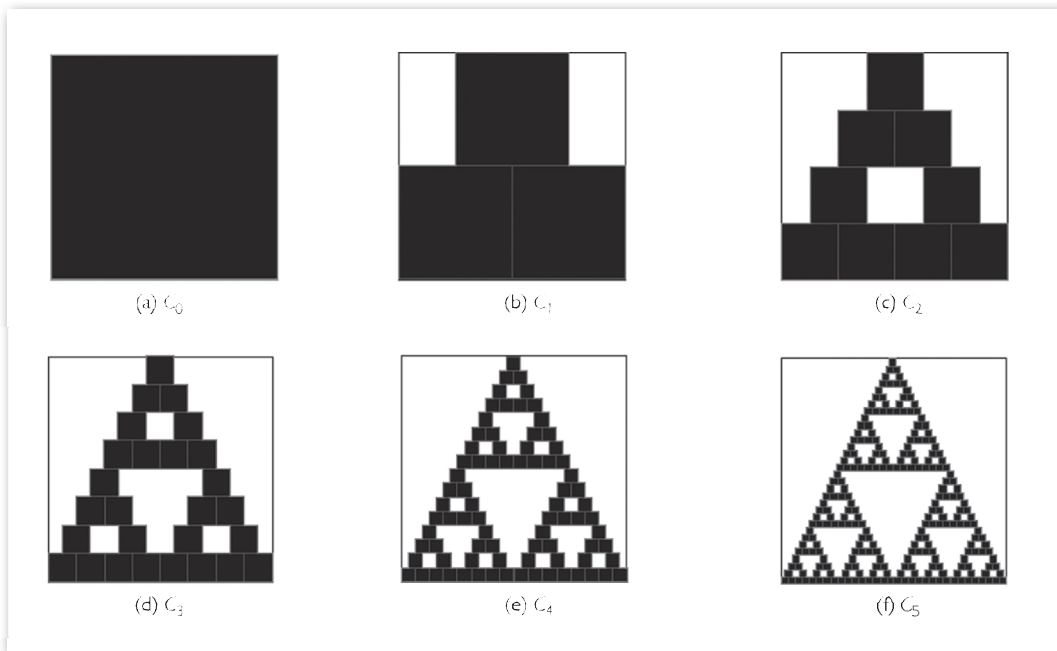


Figura 3: C_0 e as cinco primeiras iteradas $C_1 - C_5$.

Vamos agora colocar isto em termos matemáticos. Observe que o comprimento da base do triângulo de Sierpiński na figura 2(b) é igual à sua altura. Assim, podemos considerar eixos com a origem no canto inferior esquerdo do triângulo de Sierpiński e unidades de forma a que a base e a altura tenham ambas comprimento unitário. Consideramos também as seguintes transformações afim definidas em \mathbb{R}^2 :

$$T_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right),$$

$$T_2(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2} \right),$$

$$T_3(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \right).$$

Se S é o triângulo de Sierpiński, então temos

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S). \quad (1)$$

Existem outros subconjuntos B do plano que tenham a mesma propriedade, i.e., tal que

$$B = T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B)? \quad (2)$$

Vamos ver que não há nenhum! Assim, caracterizámos o nosso triângulo de Sierpiński como o único subconjunto B tal que (1) é verificada. O que é que fizemos? Construámos uma função que a um subconjunto B do plano associa o sub-

conjunto $T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B)$. Chamemos a esta função W . Está definida por

$$B \mapsto W(B) = T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B),$$

e vimos que $S = W(S)$, i.e., S é um ponto fixo desta função. Anunciámos que íamos mostrar que o triângulo de Sierpiński é o único ponto fixo desta função. Vamos tentar com um quadrado C_0 , como na figura 3(a). A sua imagem é C_1 na figura 3(b). Aplicamos o mesmo processo a C_1 e obtemos $C_2, C_3 - C_5$, (figura 3(c)-(f)). Observamos três coisas:

- (i) Nenhum dos conjuntos C_0, \dots, C_5 é um ponto fixo de W .
- (ii) Poderíamos ter continuado este processo indefinidamente, produzindo assim uma sucessão infinita de conjuntos $\{C_n\}$, onde $C_{n+1} = W(C_n)$.
- (iii) A sucessão $\{C_n\}$ parece convergir rapidamente para o triângulo de Sierpiński. Assim a olho nu, não conseguimos distinguir C_{10} de S . Logo, no lugar de S na nossa imagem, o programa que reconstrói a nossa imagem pode só produzir C_{10} . Além disso, se necessitarmos de uma melhor resolução, então podemos usar o mesmo programa e pedir-lhe para parar em C_{20} , ou C_{30} . Assim, o mesmo pequeno programa pode reconstruir S com qualquer precisão!

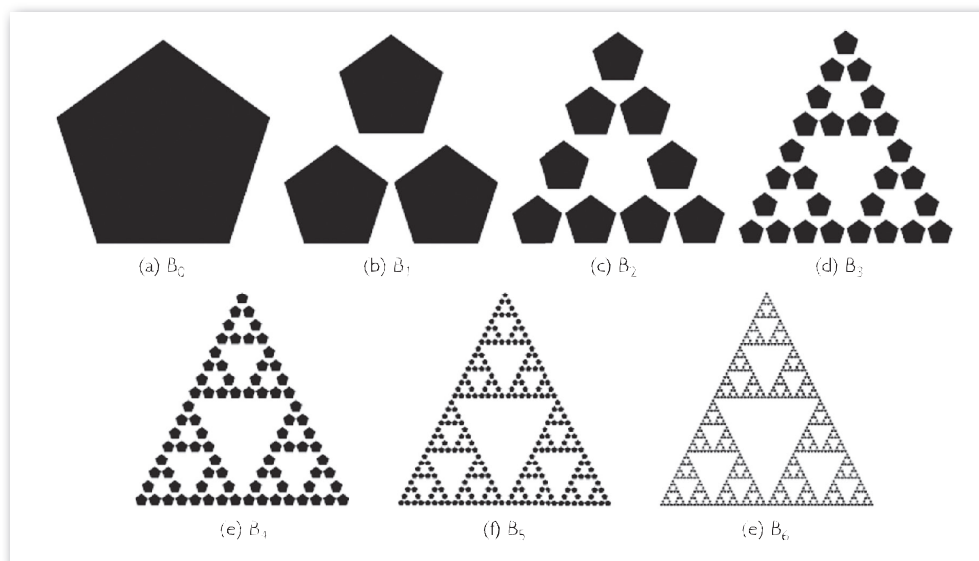


Figura 4: Um pentágono B_0 e as suas seis primeiras iteradas B_1 – B_6 .

Mais ainda, podemos verificar que funciona com qualquer conjunto inicial! Um segundo exemplo, iterando um pentágono, é mostrado na figura 4. As mesmas observações (i), (ii) e (iii) acima aplicam-se a este exemplo.

Vimos que o teorema do ponto fixo de Banach se aplica a contracções em espaços métricos completos. Definimos a função W em (2) nos subconjuntos do plano. Para espaço métrico, vamos tomar \mathcal{K} como o conjunto de subconjuntos limitados (fechados) do plano. Introduzimos uma distância em \mathcal{K} chamada distância de Hausdorff. A definição de distância de Hausdorff $d_H(B_1, B_2)$, entre dois conjuntos B_1 e B_2 , é dada por uma fórmula obscura e complicada, por isso vamos explicar este conceito de outra forma. Vamos começar por ver que significado queremos atribuir à fórmula

$$d_H(B_1, B_2) \leq \epsilon$$

(mesmo sem ter definido o que é $d_H(B_1, B_2)$!). Simplesmente significa que se o nosso olho tem uma precisão de ϵ , então ele não consegue distinguir B_1 de B_2 . Em termos matemáticos, $d_H(B_1, B_2) \leq \epsilon$ significa que

$\forall P \in B_1 \exists Q \in B_2 d(P, Q) \leq \epsilon$ e $\forall P' \in B_2 \exists Q' \in B_1 d(P', Q') \leq \epsilon$. (3)
(Onde d é a distância euclideana usual em \mathbb{R}^2 .) Isto permite dar a definição indirecta.

Definição 4.1

A distância de Hausdorff entre dois conjuntos fechados e limitados B_1 e B_2 é o mínimo de todos os $\epsilon \geq 0$ tal que (3) é verificada.

Podemos agora convencer-nos de que a função W é uma contracção. De facto, vamos supor que $d_H(B_1, B_2) \leq \epsilon$. Então podemos mostrar que

$$d_H(W(B_1), W(B_2)) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $P \in W(B_1)$. Então, existe $i \in \{1, 2, 3\}$ e $P_1 \in B_1$ tal que $P = T_i(P_1)$. Como $d_H(B_1, B_2) \leq \epsilon$, existe $Q_1 \in B_2$ tal que $d(P_1, Q_1) < \epsilon$. Seja $Q = T_i(Q_1)$. Então

$$d(P, Q) = d(T_i(P_1), T_i(Q_1)) = \frac{1}{2}d(P_1, Q_1) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Analogamente, se começarmos com $P' \in W(B_2)$, então existe $Q' \in W(B_1)$ tal que $d(P', Q') \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Este processo foi adaptado a compressão de imagens reais (ver [2] ou [5]). O método produz imagens de alta qualidade quando a imagem tem algum carácter fractal. Contudo, o coeficiente de compressão não é tão bom nem tão flexível como o formato JPEG. Além disso, o processo de codificação (transformando a imagem num programa para a reconstruir) é ainda assim demasiado fastidioso para ter interesse prático. Contudo, a simplicidade da ideia juntamente com o seu potencial de aplicação é bastante animadora.

5. UMA APLICAÇÃO SURPREENDENTE: O ALGORITMO DE CLASSIFICAÇÃO DE PÁGINAS PAGERANK

O sucesso do Google enquanto motor de busca tem origem no seu algoritmo: o algoritmo PageRank. Neste algoritmo é calculado um ponto fixo de um operador linear em \mathbb{R}^n , este

ponto fixo (que é um vector) fornece a ordem das páginas. Na prática, o ponto fixo (que é um vector próprio do valor próprio 1) é calculado aproximadamente como P_n para n suficientemente grande. Convidamos o leitor interessado a ver os detalhes na *Klein vignette* “Google and the PageRank algorithm” em <http://wikis.zum.de/dmuw/index.php/KleinVignettes>

6. CONCLUSÃO

O que vimos nesta *Klein vignette* foi como, começando de um simples jogo podemos descobrir ideias muito poderosas que podem levar a avanços matemáticos e tecnológicos. Quando procuramos uma solução única para um problema, tem-se tornado um método, em muitos domínios da matemática, tentar ver se a solução do problema pode ser caracterizada como o único ponto fixo de um operador especialmente construído para este fim.

Vimos que a vantagem desta abordagem é que o teorema fornece um processo eficiente e prático de construir o objecto solução como o limite de uma sucessão dado que a convergência é rápida.

A análise é o estudo das funções. As funções são geralmente definidas em números. No cálculo em várias variáveis, generalizamos a noção de função a vectores que são elementos de \mathbb{R}^n . Mas porquê parar nos elementos de \mathbb{R}^n ? Todos já percebemos que os matemáticos gostam de generalizar a noção de função e permitem que ela seja definida, por exemplo, em conjuntos de conjuntos e em conjuntos de funções, etc. Fazer análise em conjuntos de funções tornou-se um importante capítulo da análise moderna, chamada *análise funcional*, que é *standard* no ensino superior.

O leitor está convidado a fazer a ligação a alguns dos processos iterativos que já encontrou. Por exemplo, o processo iterativo em dimensão um associado à sucessão de Héron para obter raízes quadradas. A rápida convergência geométrica também pode ser entendida a partir do ponto de vista apresentado aqui.

REFERÊNCIAS

[1] M. F. Barnsley, “Fractals Everywhere”, San Diego, Academic Press, 1988.

[2] J. Kominek, “Advances in Fractal Compression for Multimedia Applications”, *Multimedia Systems Journal*, vol. 5, nº 4, 1997, 255–270.

[3] C. Rousseau, “Point Fixe de Banach” (em francês), *Accromath 5*, hiver-printemps 2010 (www.accromath.ca).

[4] C. Rousseau, “How Google Works?” *Klein vignette* (www.kleinproject.org).

[5] C. Rousseau and Y. Saint-Aubin, “Mathematics and Technology”, SUMAT Series, Springer-Verlag, 2008 (Existe uma versão em Francês do mesmo livro, publicada na mesma série.)

SOBRE A AUTORA

Christiane Rousseau obteve um doutoramento pela Université de Montréal em 1977. Dedicou-se à investigação em equações diferenciais, área em que tem dezenas de artigos publicados. Recebeu vários prémios ao longo da sua carreira, entre eles o prémio Abel-Gauthier 1999 da Association Mathématique du Québec, para a personalidade do ano. Para além do seu trabalho de investigação, tem desenvolvido inúmeras actividades de divulgação da Matemática. Neste momento é professora catedrática na Université de Montréal.



Na edição 163 da **Gazeta de Matemática** foram publicadas algumas imagens nos artigos sobre Aureliano de Mira Fernandes e José Ribeiro de Albuquerque, sem que fosse mencionado a sua origem, os blogues <http://ruyluisgomes.blogspot.com/> e <http://polyedros.blogspot.com/>, mantidos por Jorge Rezende. Pedimos, por isso, as nossas desculpas.