Alexander Kovačec
Universidade de Coimbra
kovacec@mat.uc.pt

JUSTIFICAÇÃO MATEMÁTICA DA REGRA DO PARALELOGRAMO NA FÍSICA

A regra do paralelogramo para adicionar vectores em geometria é uma definição ou, dependente da abordagem, justificável com axiomática de geometria. Mas com que razão, para além de experiências de precisão limitada, o aceitamos na física para somar forças? Uma boa resposta requer alguma matemática sofisticada. A validade da regra talvez seja *a* razão do papel preponderante do cálculo vectorial em mecânica.

Aluno: Em casa construí este aparelho simples (figura 1a). Através de pesos e fios, que correm sobre roldanas fixadas num anel, aplico forças denotadas por $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ num ponto P. Se as representar geometricamente por vectores no plano com normas (comprimentos) iguais às dos pesos associados, então verifico que o vector $\vec{r}$ é igual ao simétrico da soma geométrica de $\vec{p}$ e $\vec{q}$, determinada segundo a regra do paralelograma que aprendemos em geometria. Posso reajustar as roldanas, e mudar os pesos como quero. Todas as experiências mostram que, em equilíbrio, P assume uma posição tal que a soma geométrica $\vec{p}+\vec{q}$ é igual a $-\vec{r}$, ou seja $\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}=\vec{0}$. Como é possível que a física, i.e. o mundo real, obedeça tão maravilhosamente às leis simples da matemática?

Professor: Esta questão foi abordada por cientistas reputados. Lê [2, p.75] e procura o artigo do físico Eugene P. Wigner aí citado. Diz-se que Deus é um matemático supremo. Uma boa resposta à tua pergunta específica vais encontrar neste Canto Délfico.

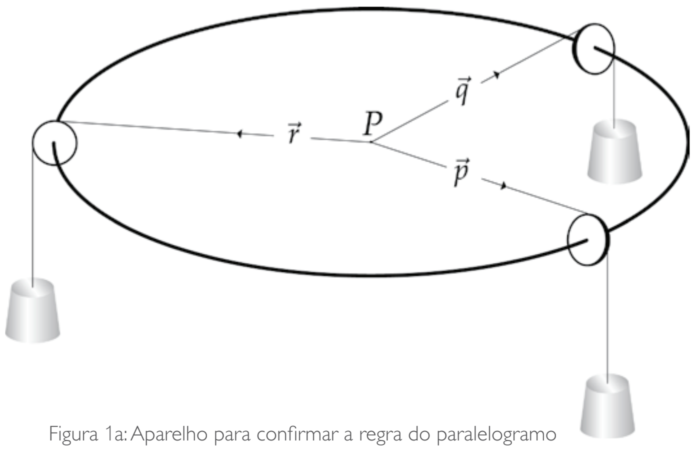

Figura 1a: Aparelho para confirmar a regra do paralelogramo

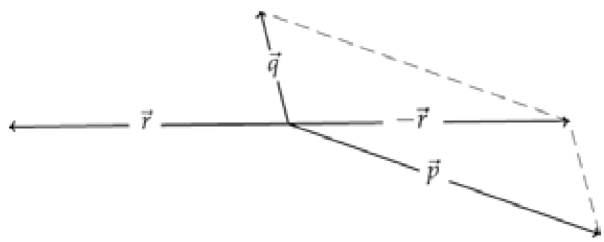

Figura 1b: Determinação geométrica da soma dos vectores $\vec{p}, \vec{q}$.

Com efeito, vamos apresentar uma justificação para o uso da regra do paralelogramo na física. Esta parte de hipóteses bastante fracas e naturais, mas precisa de alguma matemática sofisticada.

Seja $E = \mathbb{R}^3$ o espaço euclideano a três dimensões. A procurada lei para compor ('somar') forças representadas por vectores é uma aplicação $E \times E \ni (\vec{p}, \vec{q}) \to \vec{p} \dotplus \vec{q} \in E$. É nosso objectivo mostrar que esta soma é igual à soma de vectores definida na geometria através do conhecido paralelogramo gerado por $\vec{p}, \vec{q}$, ou seja, vamos provar que $\vec{p} \dotplus \vec{q} = \vec{p} + \vec{q}$. A seguir, ρ significa uma rotação espacial qualquer, e $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in E$ vectores quaisquer.

Note-se que não tentamos definir o que 'força' é, nem o que uma rotação é. Antes postulamos para estes conceitos certas propriedades que vão parecer naturais.

i. Se submetermos duas forças à mesma rotação, então a sua soma sofre ainda a mesma rotação. Formalizando: $\rho(\vec{p} \dotplus \vec{q}) = \rho(\vec{p}) \dotplus \rho(\vec{q})$.

ii. A força resultante exercida sobre P por duas ou três forças que a compõem depende apenas destas, e não da ordem com que as denotamos ou contemplamos. Além disto, toda a força pode ser anulada por certa outra e a força nula é neutra relativamente à adição. Por outras palavras: O espaço E munido da adição '$\dotplus$' define um grupo abeliano: para $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ em E quaisquer

$$\vec{p} \dotplus \vec{q} = \vec{q} \dotplus \vec{p},\ (\vec{p} \dotplus \vec{q}) \dotplus \vec{r} = \vec{p} \dotplus (\vec{q} \dotplus \vec{r}),\ \vec{0} \dotplus \vec{p} = \vec{p},$$

e para todo o $\vec{p}$ existe um $\vec{q}$ tal que $\vec{p} \dotplus \vec{q} = \vec{0}$.
Para um real λ e força $\vec{p}$ define-se $\lambda\vec{p}$ como sendo a força paralela (se $\lambda \geq 0$) ou antiparalela (se $\lambda < 0$) a $\vec{p}$ de norma $|\lambda||\vec{p}|$.

iii. A norma da resultante de dois vectores de normas iguais depende de forma contínua da sua norma e do ângulo entre eles. Ou seja: a função $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \ni (\lambda, p, q) \mapsto |\lambda\vec{p} \dotplus \lambda\vec{q}|$ é contínua. Aqui $\mathbb{S}^2$ é a superfície esférica de raio 1. Ela representa todos os vectores de norma 1.

iv. Se $\vec{p}, \vec{q}$ são forças paralelas (do mesmo sentido), então a norma da sua soma é igual à soma das normas: se $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$, então $|\vec{p} \dotplus \vec{q}| = |\vec{p}| + |\vec{q}|$.

Partindo destes postulados pouco restritivos vamos agora, passo por passo, deduzir a regra do paralelogramo.

Lema. *Sejam $\vec{e}, \vec{e}'$ vectores de normas iguais. Então a sua resultante tem a direção da bissectriz do ângulo $\angle(\vec{e}, \vec{e}')$ e norma proporcional à de $\vec{e}$ (ou de $\vec{e}'$).*

Prova. Seja ρ a rotação por π radianos (180 graus) em torno da bissectriz de $\angle(\vec{e}, \vec{e}')$. Então $\rho(\vec{e})$ tem origem e sentido de $\vec{e}'$.

Como ainda $|\vec{e}| = |\vec{e}'|$, temos $\rho(\vec{e}) = \vec{e}'$.

Da mesma forma $\rho(\vec{e}') = \vec{e}$. Por isso os postulados i e ii implicam $\rho(\vec{e} \dotplus \vec{e}') = \vec{e}' \dotplus \vec{e} = \vec{e} \dotplus \vec{e}'$. Ou seja a soma fica invariante sob a rotação ρ. Como uma rotação deixa invariante apenas uma direção, vemos que $\vec{e} \dotplus \vec{e}'$ está sobre a bissectriz. Seja agora $f(\lambda) = |\lambda\vec{e} \dotplus \lambda\vec{e}'|$. Se λ for um racional, $\lambda = \frac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, digamos, então

$$\begin{aligned} \lambda\vec{e} \dotplus \lambda\vec{e}' &\overset{iv}{=} \overbrace{\left(\frac{1}{n}\vec{e} \dotplus \cdots \dotplus \frac{1}{n}\vec{e}\right)}^{m \text{ parcelas}} \dotplus \left(\tfrac{1}{n}\vec{e}' \dotplus \cdots \dotplus \tfrac{1}{n}\vec{e}'\right) \\ &\overset{ii}{=} \left(\tfrac{1}{n}\vec{e} \dotplus \tfrac{1}{n}\vec{e}'\right) \dotplus \cdots \dotplus \left(\tfrac{1}{n}\vec{e} \dotplus \tfrac{1}{n}\vec{e}'\right) \end{aligned}$$

Daí obtemos $f(\frac{m}{n}) = |\frac{m}{n}\vec{e} \dotplus \frac{m}{n}\vec{e}'| = m|\frac{1}{n}\vec{e} \dotplus \frac{1}{n}\vec{e}'| = mf(\frac{1}{n})$, e, em particular, $f(1) = f(n/n) = nf(1/n)$, e portanto $f(r) = rf(1)$ para $r \in \mathbb{Q}_{>0}$. A hipótese iii de continuidade de f dá agora $f(\lambda) = \lambda f(1)$ para um real $\lambda \geq 0$ qualquer. O mesmo é válido para $\lambda < 0$ usando que $r \in \mathbb{Q}_{<0}$ pode ser escrito $\frac{-m}{n} = r$ com $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Isto prova o lema.

Note-se que dados quaisquer dois pares de versores, $\vec{e}, \vec{e}'$ e $\vec{e}_1, \vec{e}_1'$ que definem o mesmo ângulo, existe uma rotação ρ tal que $(\rho(\vec{e}), \rho(\vec{e}')) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1')$. Como rotações não alteram normas,

$$|\vec{e} \dotplus \vec{e}'| = |\rho(\vec{e} \dotplus \vec{e}')| = |\rho(\vec{e}) \dotplus \rho(\vec{e}')| = |\vec{e}_1 \dotplus \vec{e}_1'|.$$

Isto serve para dizer que a função $f(y) := \frac{1}{2}|\vec{e} \dotplus \vec{e}'|$ com $\vec{e}, \vec{e}'$ versores e $\angle(\vec{e}, \vec{e}') = 2y$ está bem definida, i.e. não depende da escolha dos versores.

Sejam agora $\vec{p}_1, \vec{p}_2; \vec{q}_1, \vec{q}_2$ pares de versores que definem o mesmo ângulo. Definamos $\vec{p}, \vec{q}, x, y$ pelas equações

$$\vec{p} = \vec{p}_1 \dotplus \vec{p}_2, \quad \vec{q} = \vec{q}_1 \dotplus \vec{q}_2,$$

$$\angle(\vec{p}, \vec{q}) = 2x, \quad \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \angle(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 2y.$$

Por definição de f temos $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2f(y)$ e pelo lema a indicação dos ângulos dada na figura 2 é justificada e temos

$$|\vec{p} \dotplus \vec{q}| = 2f(y)2f(x),$$

$$|\vec{p}_1 \dotplus \vec{q}_1| = 2f(x+y), \quad |\vec{p}_2 \dotplus \vec{q}_2| = 2f(x-y).$$

Por isso,

$$\begin{aligned} 4f(x)f(y) &= |\vec{p} \dotplus \vec{q}| = |(\vec{p}_1 \dotplus \vec{p}_2) \dotplus (\vec{q}_1 \dotplus \vec{q}_2)| \\ &\overset{ii}{=} |(\vec{p}_1 \dotplus \vec{q}_1) \dotplus (\vec{p}_2 \dotplus \vec{q}_2)| \\ &\overset{iv}{=} 2f(x+y) + 2f(x-y). \end{aligned}$$

Do postulado ii decorre $f(\frac{\pi}{2}) = 0$. O seguinte teorema, provado a seguir, diz-nos que a função f que é por iii contínua, é igual à função cosseno.

Teorema. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ e para todos os $x, y \in \mathbb{R}$ a equação funcional de d'Alembert*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Então, $f = \cos$.

Daqui tiramos o seguinte facto:

F1. A soma física $\vec{p} \dotplus \vec{q}$ de dois vectores de igual norma $|\vec{p}| = |\vec{q}| = \lambda$ que fazem um ângulo $2x$ é igual a $2\lambda \cos x\, \vec{b}$, onde $\vec{b}$ é o versor da bissectriz de $\vec{p}, \vec{q}$; pela figura 3, este vector é então igual à soma geométrica dos dois: $\vec{p} \dotplus \vec{q} = \vec{p} + \vec{q}$.

Mostremos a seguir esta mesma igualdade no caso $\vec{p} \perp \vec{q}$, e finalmente para vectores $\vec{p}, \vec{q}$ quaisquer.

Na figura 4 vemos vectores $\vec{p} \perp \vec{q}$ que geram o rectângulo $[OPRQ]$. Sabe-se (por axiomática de geometria) que as diagonais de um rectângulo se intersectam num ponto M que as bissecta. Sejam $\vec{s} = \overrightarrow{OM}$ e $\vec{q}_1 = \overrightarrow{OQ}_1$, $\vec{p}_1 = \overrightarrow{OP}_1$ as translações de $\overrightarrow{PM}$ e $\overrightarrow{MP}$, respectivamente, para O. Então vemos

$$\begin{aligned} \vec{p} \dotplus \vec{q} &\overset{F1}{=} (\vec{p}_1 \dotplus \vec{s}) \dotplus (\vec{s} \dotplus \vec{q}_1) \overset{ii}{=} (\vec{p}_1 \dotplus \vec{q}_1) \dotplus 2\vec{s} \\ &\overset{ii}{=} \vec{0} \dotplus 2\vec{s} \overset{ii}{=} 2\vec{s} = \vec{p} + \vec{q}. \end{aligned}$$

Mostrámos assim o facto seguinte.

F2. Se $\vec{p} \perp \vec{q}$,então $\vec{p} \dotplus \vec{q} = \vec{p} + \vec{q}$.

Finalmente, sejam $\vec{p}, \vec{q}$ vectores quaisquer. Examinemos a figura 5.

Dos pontos P e Q baixámos perpendiculares à dia-

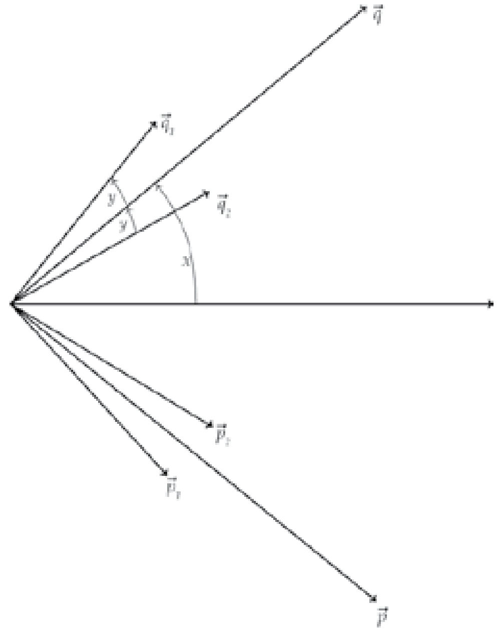

Figura 2: As relações entre $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}, \vec{q}_1, \vec{q}_2$, e $\vec{q}$.

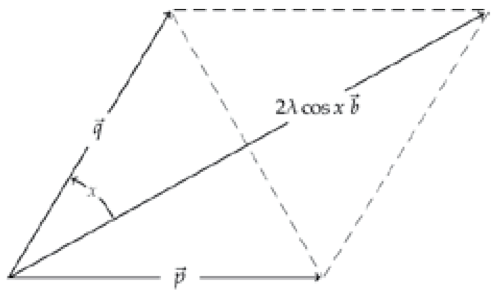

Figura 3: Justificando a adição de forças da mesma norma.

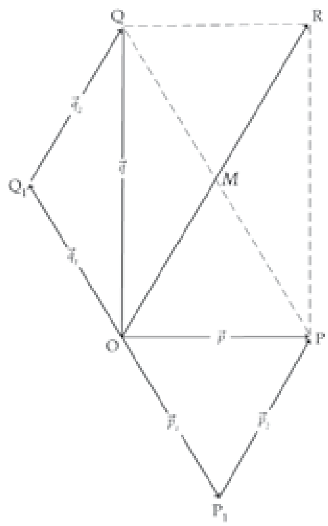

Figura 4: Justificando a adição de forças perpendiculares.

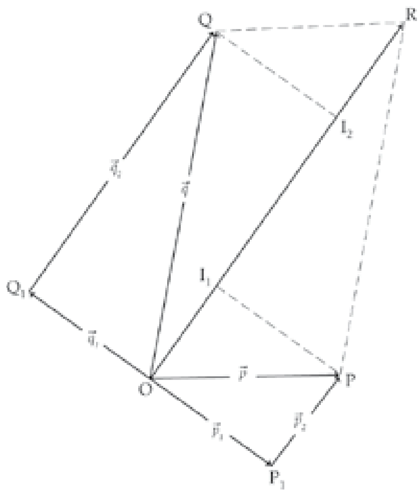

Figura 5: Justificando a adição de forças quaisquer.

gonal OR com pés I_1, I_2. Os vectores $\vec{q}_1, \vec{p}_1$, paralelos a estas perpendiculares e aplicados em O, têm por congruência de triângulos $\triangle QRI_2 \cong \triangle POI_1$ soma $\vec{0}$: $\vec{p}_1 + \vec{q}_1 = \vec{0}$. Com raciocínio um pouco análogo ao anterior, obtemos

$$\vec{p} \hat{+} \vec{q} \overset{F2}{=} (\vec{p}_1 \hat{+} \vec{p}_2) \hat{+} (\vec{q}_1 \hat{+} \vec{q}_2) \overset{ii}{=} (\vec{p}_1 \hat{+} \vec{q}_1) \hat{+} (\vec{p}_2 \hat{+} \vec{q}_2) \overset{iv}{=} \vec{p} + \vec{q}.$$

Isto termina a justificação da regra do paralelogramo excepto que devemos ainda provar o teorema atrás mencionado.

Prova do teorema: Pondo $y = 0$, obtemos $2f(x) = 2f(x)f(0)$ para todos os $x \in \mathbb{R}$. Usando aqui $x = 0$, inferimos $2 = 2f(0)$, logo $f(0) = 1$. Pondo $x = 0$ na equação funcional, vemos $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, ou seja, $f(y) = f(-y)$ para todos os y. Portanto, f é uma função par. Pondo nela $y = x$, vem $f(2x) + 1 = 2f(x)^2$, o que equivale a $*_0 : \ f(t/2)^2 = (1 + f(t))/2$ para $t \in \mathbb{R}$.

Como f e cos são contínuas e assumem os valores 1 e 0 em 0 e $\pi/2$, respectivamente, existem $a, c \in]0, \pi/2[$ tais que $0 < f(a) = \cos c < 1$. Estabelecemos a seguir que para todos os $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, se tem $*_1 : \ f(na/2^m) = \cos(nc/2^m)$.

São consequências do teorema da adição do cosseno,

$$\cos(u + w) = \cos(u)\cos(w) - \sin(u)\sin(w),$$

as duas fórmulas

$$\begin{aligned} 1 + \cos(2x) &= 2\cos(x)^2; \\ \cos((n+1)x) &= 2\cos(x)\cos(nx) - \cos((n-1)x). \end{aligned}$$

Tratamos do caso $n = 1$ de $*_1$ por indução sobre m. Para $m = 0$ ($*_1$) lê-se $f(a/2^0) = \cos(c/2^0)$, o que é verdade segundo a definição de c. Supondo $*1$ para determinado m, e usando a primeira das fórmulas para o cosseno, vem $*1$ com $m + 1$ em lugar de m, pois

$$\begin{aligned} f(a/2^{m+1})^2 &= f((a/2^m)/2)^2 \overset{*_0}{=} (1 + f(a/2^m))/2 \\ &\overset{h.i.}{=} (1 + \cos(c/2^m))/2 = \cos^2(c/2^{m+1}). \end{aligned}$$

Portanto, temos $*1$ para $n = 1$ e todos os $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Pondo na equação funcional para f, $x = ny$, obtemos $f((n+1)y) = 2f(y)f(ny) - f((n-1)y)$. Supondo $*1$ para determinado n e usando a segunda das fórmulas para o cosseno, podemos então escrever

$$\begin{aligned} & f((n+1)a/2^m) \\ &= 2f(a/2^m)f(na/2^m) - f((n-1)a/2^m) \\ &= 2\cos(c/2^m)\cos(nc/2^m) - \cos((n-1)c/2^m) \\ &= \cos((n+1)c/2^m), \end{aligned}$$

mostrando $*1$ para $n + 1$ em lugar de n, e logo para todos os $n \in \mathbb{Z}$, também os negativos, pois tanto f como cos são funções pares.

Como a família dos pontos $na/2^m$, $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ é densa na recta, e f uma função contínua, obtemos $f(x) = \cos((c/a)x)$ para todos os $x \in \mathbb{R}$. Ora $f(\pi/2) = 0$ obriga a $c/a = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Então $f(\pi/(4k+2)) = \cos(\pi/2) = 0$; ou seja, se dois vectores de norma 1, $\vec{e}$ e $\vec{e}'$, fazem um ângulo $\pi/(2k+1)$, então $\vec{e} \hat{+} \vec{e}' = 0$. Como $(E, \hat{+})$ é grupo, só $\vec{e}' = -\vec{e}$ é aqui possível. Isto implica $k = 0$, logo $f = \cos$, como queríamos mostrar.

O presente artigo baseia-se na secção 2.4 do livro [1] que por sua vez relata pensamentos de matemáticos tão famosos como d'Alembert (1750), Siméon Denis Poisson (1804), Augustin Louis Cauchy (1821), Niels Henrik Abel (1823) e outros sobre o assunto. Uma abordagem alternativa da equação de d'Alembert usando cálculo encontra-se em [3]. As afirmações geométricas decorrentes da axiomática podem ser obtidos usando sobretudo resultados dos capítulos 6 e 8 de [4] ou as páginas Axdist 24, 25 de [5].

Como desafio, deixamos ao leitor o seguinte problema-tipo de equações funcionais que se encontram em Olimpíadas de Matemática.

Problema. Encontrar todas as funções $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ que satisfazem $f(xf(y)) = yf(x)$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Para nos motivar na continuação do Canto Délfico envie evidências de leituras sérias dos nossos artigos – soluções de problemas, apontamentos em que pormenorizou provas, reflexões sobre os argumentos apresentados, perguntas que surgiram na leitura de cantos délficos – e sugestões para futuros artigos para:

Projecto Delfos
Departamento de Matemática
Apartado 3008, E.C. Universidade
3001-454 Coimbra

Retribuímos tais evidências com a publicação dos respectivos nomes (e certificados, se quiserem) que atestam o vosso profissionalismo.

Agradecimentos: A todos que melhoraram aspectos deste texto, mas muito em particular aos gráficos.

REFERÊNCIAS

[1] Janos Aczél, "Lectures on Functional Equations and their applications", Academic Press, New York (1966)

[2] Philip J. Davis e Reuben Hersh, "A Experiência Matemática", Gradiva (1995).

[3] F. J. Papp, (1985) "The d'Alembert Functional Equation", *Amer. Math. Monthly* 92 (1985) 273-274.

[4] P. V. Araújo, "Curso de Geometria", Gradiva (1997).

[5] Texto Delfos (cópia pode ser obtida do autor).