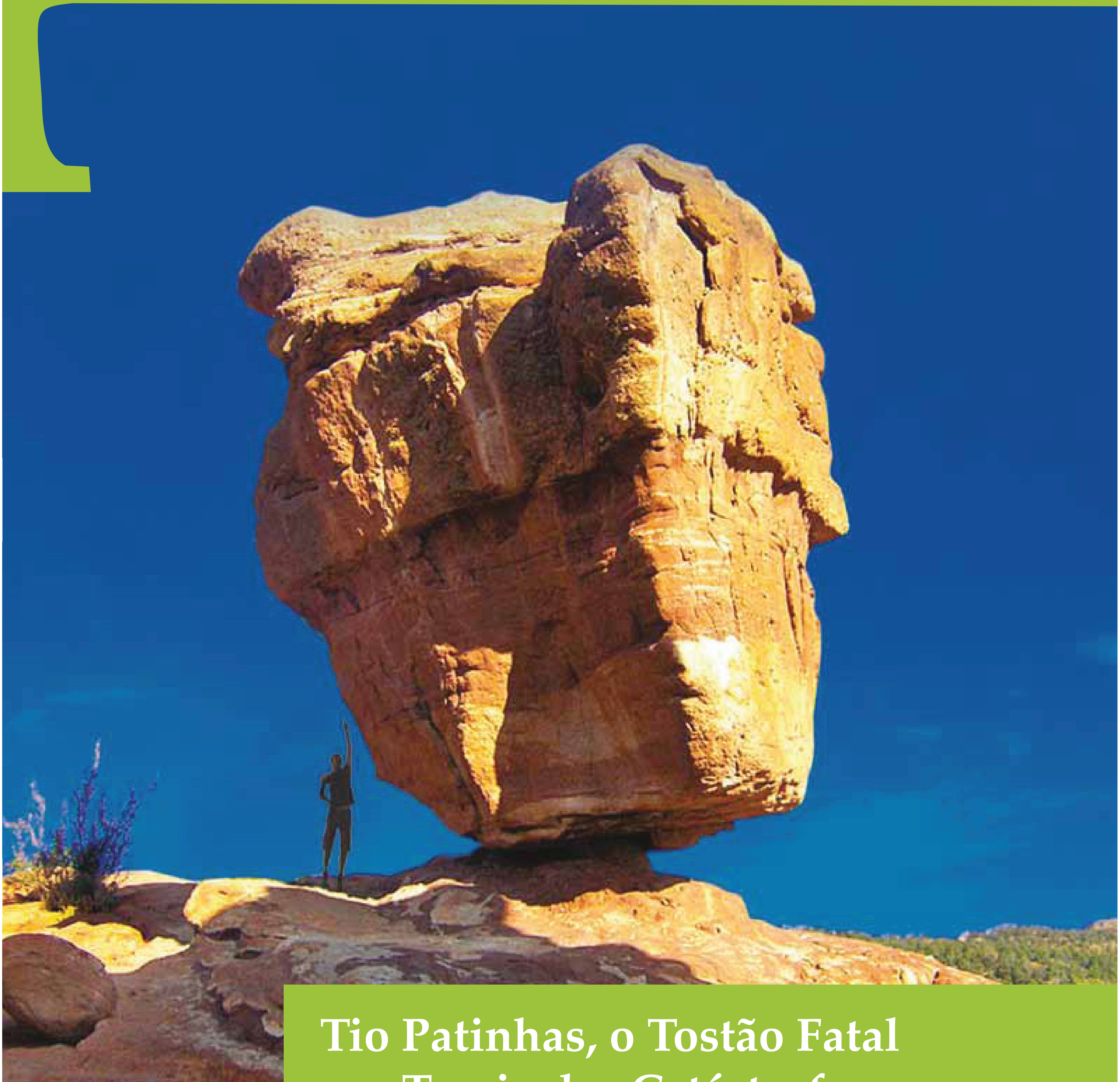


Tio Patinhas, o Tostão Fatal e a Teoria das Catástrofes

Fabio Zanolin
Dipartimento di Matematica e Informatica, Universitá di Udine
fabio.zanolin@uniud.it

O que têm em comum o Tio Patinhas, o pintor surrealista Salvador Dalí, a queda do Império Romano e os reflexos de luz numa chávena de chá? E, por amor à ciência, é conveniente provocar um cão agressivo só para ver se um teorema de geometria diferencial é verdadeiro? O matemático francês René Thom desenvolveu uma teoria geométrica que explica porque é que certas formas simples aparecem em todo o lado nas ciências naturais. Desta teoria foram imaginadas consequências e aplicações de todos os tipos. Apresentaremos uma breve introdução à teoria das catástrofes, esperando despertar a curiosidade do leitor e o seu desejo de aprofundar alguns dos tópicos apresentados.

Em *A Christmas for Shacktown*, um dos mais belos trabalhos de Carl Barks, publicado pela primeira vez em Janeiro de 1952, Tio Patinhas corre o risco de perder todo o dinheiro contido no seu cofre pelo colapso do chão do próprio edifício causado pela carga de moedas e notas aí amontoadas. A razão que desencadeia o desastre é uma miserável moedinha: o tostão fatal referido no título.

Este é só um exemplo dos muitos que são usualmente associados ao termo "catástrofe", entendida como o surgir repentino de um efeito explosivo em consequência de uma causa que pode ser de intensidade leve ou, de qualquer forma, pode exercer a sua influência de modo contínuo no tempo, sem efeitos aparentes até o momento do desastre. Voltando à história de Carl Barks, durante anos e anos as moedas foram adicionadas uma após a outra no cofre num processo de acumulação de tipo contínuo e sem qualquer alteração digna de nota na estrutura do edifício. A certo ponto, aparece uma descontinuidade repentina e o desmoronamento (assinalado pelo *rumble* do quadradinho) é o seu resultado inesperado.

Em geral, faz-se remontar o nascimento da teoria das catástrofes como teoria matemática ao ano de 1972, com a publicação do livro *Stabililité Structurelle et Morphogénèse. Essai d'une théorie générale des modelès*, do matemático francês René Thom (1923-2002). O livro, especialmente após a sua tradução em inglês, teve um enorme impacto, embora ainda hoje, por causa do seu estilo complexo, talvez não seja bem compreendido por muitos. René Thom entrou em 1943 na prestigiada École Normale Supérieure de Paris, onde se licenciou em 1946, e obteve uma posição de investigação no CNRS, em Estrasburgo. Depois de uma bolsa de estudo, que lhe permitiu passar um período nos Estados Unidos (onde encontrou também Einstein), ensinou em Grenoble (1953-1954) e em seguida, novamente em Estrasburgo (1954-1963). Foi nomeado professor em 1957. Em 1958, com 35 anos, foi galardoado com a Medalha Fields pelas suas importantes contribuições à topologia diferencial e à teoria das singularidades, algumas das quais remontavam ao trabalho de investigação com o qual concluiu o seu doutoramento em 1951. Como é sabido, não há Prémio Nobel da Matemática

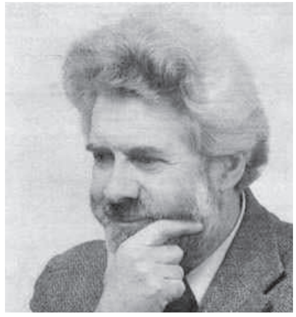
(embora alguns matemáticos tenham recebido o Prémio Nobel em outras áreas pelo seu trabalho). O Congresso Internacional de Matemáticos, que se reuniu em Zurique em 1932, adoptou a proposta de John Charles Fields de preencher essa lacuna, e os reconhecimentos para a matemática (chamados por esta razão Medalhas Fields) foram conferidos pela primeira vez no congresso seguinte, em Oslo em 1936. Após uma interrupção durante o período da Segunda Guerra Mundial, desde 1950 as Medalhas Fields foram regularmente atribuídas de quatro em quatro anos. Estes prémios são dados como reconhecimento à investigação já desenvolvida, mas também a matemáticos que se demonstrem particularmente promissores. Com efeito, para receber a Medalha Fields é preciso não ter mais de 40 anos de idade.

Por ocasião do discurso de atribuição da Medalha Fields a Thom pela sua investigação sobre temas como o cobordismo e os teoremas de transversalidade, destacou- se em particular como as ideias de Thom, dignas de admiração pelo seu carácter geométrico e pela sua natureza intuitiva, haviam enriquecido a matemática e como tudo parecesse indicar que o impacto dessas ideias estava longe de estar esgotado. Em 1964, René Thom transferiu-se para o Institut des Hautes Études Scientifiques em Bures-sur-Yvette, um centro de investigação perto de Paris, onde continuou a trabalhar até à reforma, em 1988.

Embora a teoria das catástrofes tenha as suas raízes na investigação em Topologia Diferencial que valeu a Thom a Medalha Fields, o seu maior desenvolvimento deu-se nos anos que se seguiram a 1960. O próprio Thom afirma em alguns artigos autobiográficos que a Medalha Fields lhe garantiu a liberdade de escolher os tópicos de investigação que queria desenvolver sem nenhuma restrição. Isto levou-o gradualmente a abandonar a investigação matemática no sentido mais puramente técnico do termo e a abranger noções mais gerais, tais como a génese das formas em biologia[1], em geologia, na linguística, em ciências sociais e noutros campos ainda, contando sempre mais com a sua intuição geométrica do que com o formalismo matemático de tipo académico.

Não se pode concluir esta breve nota histórica sobre a "teoria das catástrofes" sem mencionar o nome do matemático inglês Erik Christopher Zeeman (nascido em 1925), que muito contribuiu para a difusão da teoria e das suas aplicações (ver,

René Thom



Chris Zeeman

por exemplo, [5]). Chris Zeeman foi uma figura importante no panorama da matemática britânica de 1900. Licenciado em Cambridge, em 1964 transferiu-se para a nova Universidade de Warwick, perto da cidade de Coventry, onde ficou até 1988. Sob a sua liderança, Warwick tornou- se em poucos anos um dos centros de investigação mais importantes para o estudo dos sistemas dinâmicos. Para além dos seus sucessos na investigação matemática, (e no mundo académico, que lhe garantiram um amplo número de distinções (chegando a receber o título de "Sir"), Christofer Zeeman é famoso pelas suas aulas e conferências brilhantes e pela sua obra a favor da educação de jovens talentos matemáticos no Reino Unido. Se a teoria das catástrofes se tornou tão popular fora do mundo matemático, de tal forma que até os jornais diários começaram a tratar do assunto em meados dos anos setenta com títulos do tipo "Thom: tenho a fórmula que explica os desastres" (*Corriere della Sera Illustrato*, 1978), deve-se em grande parte à obra entusiasta de artigos e conferências de Zeeman. Ele foi um verdadeiro pioneiro no que diz respeito a imaginar novas aplicações da teoria às ciências biológicas e comportamentais e inventor de uma máquina das catástrofes, um simples mecanismo que ilustra como pequenas perturbações podem dar origem a fenómenos de descontinuidade. De acordo com o próprio Thom, o termo "teoria das catástrofes" foi criado por Zeeman.

Nos anos setenta, o grande sucesso de público da teoria das catástrofes levou a uma "moda" em que cada vez mais pessoas, imitando a abordagem de Thom e Zeeman (por vezes sem perceber completamente as técnicas que utilizavam e não possuindo nem o domínio da matemática nem a intuição geométrica destes dois precursores), tentaram encontrar novas aplicações da teoria a especulações gradualmente mais ousadas e extravagantes e, por vezes, sem nenhuma base experimental. Isto provocou uma espécie de rejeição de grande parte da comunidade matemática (e científica em geral) à qual se seguiu um período de debates acalorados e de polémicas. O próprio Thom, num artigo autobiográfico de 1997, concluía amargamente: "É um facto que a teoria das catástrofes está morta. Mas poder-se-ia dizer que morreu por causa do seu grande sucesso... Quando se percebeu que a teoria não permitia previsões quantitativas, todas as mentes bem-pensantes decidiram que a teoria não tinha valor nenhum....". Hoje podemos ver tudo numa perspectiva histórica e em vez de escrever como num famoso artigo na revista *Science* de 1977 (Gina Kolata) "Teoria da Catástrofes: o rei vai nu", podem publicar-se trabalhos intitulados "Ascensão e queda da teoria das catástrofes em economia: deitou-se fora o bebé com a água do banho?" (J.B. Rosser Jr., 2007). Voltaremos a este assunto mais à frente.

Uma vez que este é um artigo escrito por um matemático, o leitor esperaria encontrar também um pouco de matemática e não apenas conversa de tipo jornalístico. Quem escreve, por sua vez, encontra-se agora num grande embaraço. Com efeito, percebe que os colegas matemáticos que vão ler este artigo se calhar estremecerão à frente de simplificações demasiado audazes e também tecnicamente incorrectas (se não forem suportadas por hipóteses bem precisas). Um exemplo: não é verdade que um ponto onde a derivada de uma função se anula é necessariamente ou de máximo ou de mínimo ou de inflexão (como parecerei sugerir daqui a pouco). No entanto, isto é verdade para algumas classes de funções (por exemplo, para aquelas de tipo polinomial). Uma premissa que é importante fazer é que a teoria das catástrofes não aborda todos os possíveis aspectos que pode apresentar uma função. As palavras mágicas neste contexto são os termos *suave* e *genérico*: as propriedades consideradas são válidas para funções que possuem uma grande regularidade (por exemplo, funções polinomiais), com a possível excepção de "casos patológicos" extremamente raros. Para além disso, estas propriedades devem manter-se para pequenas perturbações das funções. O termo "pequeno" é aqui usado de forma deliberadamente ambígua e é, num certo sentido, tautológico: pequeno significa adequado para a validade dos teoremas enunciados. Uma vez que não enunciarei de modo formal nenhum teorema, mas ilustrarei apenas um par de aplicações, não preciso de clarificar mais este assunto. Quem pretenda aprofundá-lo, deverá entrar num terreno que não é trivial e requer competências técnicas específicas de análise matemática. Uma advertência final: as propriedades que serão agora descritas são de tipo puramente qualitativo (e não quantitativo). Por exemplo, nalguns textos consideram-se as perturbações da função x^3, em outros as da função $x^3/3$. A segunda função é, por vezes, mais conveniente porque a sua derivada é x^2 (em vez de $3x^2$). Isto simplifica alguns cálculos. Para além de alguns coeficientes por redimensionar, não há diferença nenhuma em considerar uma ou outra das funções. Um pouco mais delicado é o facto de que, quando perturbamos uma função que começa com uma certa potência de x seguida de termos de grau mais baixo, não é necessário considerar todos os termos de ordem menor para obtermos todos os possíveis gráficos qualitativamente distintos. Por exemplo, os gráficos da função $y = x^2$ e das suas deformações $y = x^2 + ax + b$ são do mesmo tipo: são todas parábolas com a concavidade virada para cima (como se costuma dizer em linguagem da escola secundária). Mais precisamente, todas as parábolas da forma $y = x^2 + ax + b$ que podem ser obtidas ao variar dos coeficientes a e b (de infinitas maneiras possíveis) são meramente translações da parábola $y = x^2$ (experimente, se não acredita!). A coisa torna-se mais complicada para $y = x^3$ e as suas perturbações $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. Neste caso, ao variar dos coeficientes a, b, c podem ser obtidas formas qualitativamente diferentes dos gráficos. No entanto, quem tiver algumas reminiscências de cálculo diferencial poderá convencer-se de que, para obter todos os comportamentos qualitativamente diferentes (ou seja, todas as diferentes formas dos gráficos que podem originar-se a partir de x^3 por adição de potências de x de ordem mais baixa), bastará considerar apenas funções da forma $y = x^3 + ux$, variando o parâmetro u. Ter entendido estas observações já é um passo importante para o que se segue.

A teoria das catástrofes propõe dar uma explicação de alguns fenómenos de tipo descontínuo através do uso

[1] Inspirando-se também no trabalho pioneiro de D'Arcy Wentworth Thompson (1860-1948), autor de *Crescimento e Forma*, em 1917.

de modelos matemáticos de tipo contínuo. Um sistema (físico ou mecânico, um organismo vivo, um modelo económico ou social, etc.) é modelado por equações diferenciais. Estas equações representam a evolução do sistema no tempo. Não é necessário para o leitor saber em detalhe (ou lembrar-se, se se esqueceu) o que é uma equação diferencial. Por agora é suficiente saber que há uma dinâmica interna ao sistema de acordo com a qual a evolução do mesmo está descrita de forma semelhante às leis da física.

Chegados a este ponto, uma primeira e importante hipótese que se assume é de que o sistema seja de tipo gradiente. Isto significa que existe uma função potencial a partir da qual podem determinar-se os estados de equilíbrio do sistema. Uma *função potencial* V é uma função de um certo número de variáveis $x, y, z, \ldots$, (variáveis *internas*, que descrevem o estado do sistema) e que toma valores reais. Um exemplo clássico em Física é dado pela energia do sistema que se está a considerar, mas podem imaginar-se inúmeros outros exemplos noutras situações. Para simplificar a exposição, imaginemos por agora que o potencial depende de uma única variável x. Teremos então uma função $V(x)$ da qual poderemos traçar o gráfico (ver figura 1).

O comportamento de um sistema de tipo gradiente[2] é análogo ao de uma gota de água (ou de uma pequena bola) apoiada num ponto do gráfico e sujeita a uma força que a empurra para baixo. Ela tenderá a dirigir-se para os pontos de mínimo relativo da função potencial. Para dizer toda a verdade, há algumas excepções. Por exemplo, se pusermos a nossa gota num ponto de máximo (ou num ponto de inflexão onde a derivada é nula), a gota ficará parada em equilíbrio. Porém,

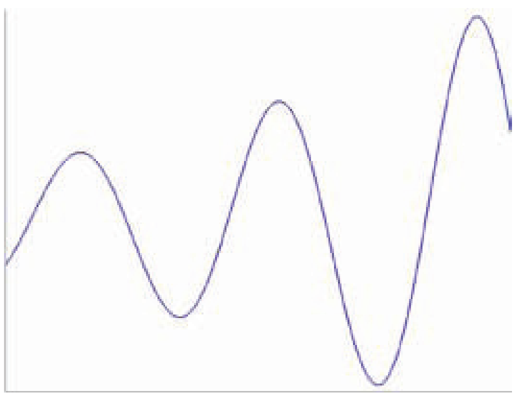


Figura 1: Um possível exemplo de função potencial numa variável x.

estas posições são de tipo instável, no sentido em que será suficiente uma pequena perturbação para fazer deslizar a nossa gota para um ponto de mínimo adjacente. Muitas vezes os sistemas físicos (como também outros sistemas em economia, em biologia, etc) comportam-se de forma semelhante ao que acabámos de descrever, estabilizando-se (depois de um certo tempo transitório) em posições de equilíbrio estável dadas pelos mínimos relativos do potencial.

Uma segunda hipótese importante da teoria das catástrofes é a de negligenciar o comportamento transitório (que se supõe realizar-se numa escala temporal muito mais curta dos fenómenos que se quer observar) para se concentrar nas posições de equilíbrio, estáveis ou instáveis. É claro que só as primeiras são as que se observam na Natureza, pois persistem por pequenas variações das condições iniciais. No caso simples considerado, isto é, o de um potencial $V(x)$ dependente de uma única variável, para determinarmos as posições de equilíbrio será suficiente estudar a equação dos pontos estacionários (ou *pontos críticos*) $V'(x) = 0$ e encontrar as suas soluções.

Se toda a história se reduzisse a isto, haveria bem pouco para contar. Mas, em geral, na Natureza a função potencial irá depender de alguns parâmetros (ditos também *factores de controlo*) que podem variar no tempo. Para dar um exemplo bastante grosseiro, a forma do nosso corpo é algo estável dia-a-dia (por sorte!), mas não fica a mesma com o passar dos anos. Cresce-se, a barriga fica maior, as costas curvam-se um pouco e o que era o jovem atlético e esbelto transforma-se num menos agraciado professor de meia-idade.

Nesta óptica, pode assumir-se que a função potencial V, para além de depender de um certo número de variáveis internas, $x, y, z, \ldots$, dependa também de um certo número de parâmetros de controlo $u, v, w, \ldots$ Variando estes parâmetros a sua forma muda de modo contínuo. As variações dos gráficos de V ao variar os parâmetros podem pensar-se como as alterações de uma paisagem com o passar das eras geológicas. Se pudéssemos filmar uma paisagem aparentemente fixa e imutável (estável) de colinas e montanhas durante vários milhões de anos e pudéssemos rever o filme a altíssima velocidade, observaríamos colinas e vales a nascer, a modificar-se, a desaparecer, etc. Podemos agora imaginar uma situação em que, ao variar de certos parâmetros, um ponto

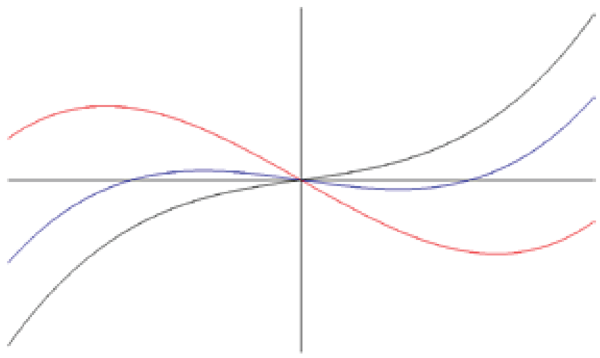


Figura 2: Gráficos da função potencial $V(x) = \frac{1}{3}x^3 + ux$ para os valores do parâmetro $u = -4$ (vermelho), $u = -1$ (azul) e $u = 1$ (preto). No primeiro caso, os pontos de mínimo e de máximo são bastante acentuados, no segundo caso, são um pouco atenuados, no terceiro, desapareceram completamente. Neste último caso, não havendo nenhum ponto de equilíbrio estável, o estado do sistema x tende para $-\infty$ (em tempo finito, pode provar-se). Diz-se que o sistema explode a $-\infty$.

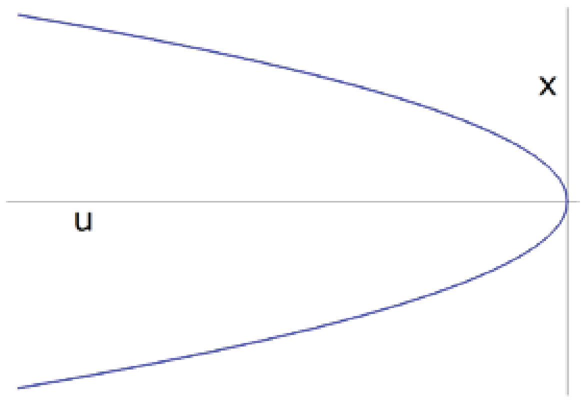


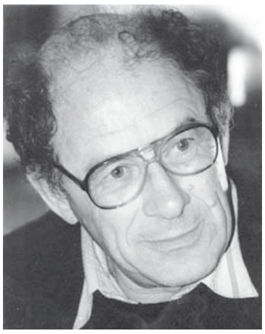
Figura 3: Conjunto dos pontos estacionários do potencial $V(x) = \frac{1}{3}x^3 + ux$ ao variar do parâmetro u. Os pontos da parábola $x^2 + u = 0$ com $x > 0$ correspondem a equilíbrios estáveis (os vales da figura anterior), enquanto os instáveis (os cumes da figura anterior) são os que correspondem a $x < 0$. Se u é negativo, o sistema encontrar-se-á no equilíbrio estável $x = \sqrt{|u|}$. O parâmetro u pode aumentar de forma contínua, e quando ultrapassar o valor $u = 0$ os equilíbrios desaparecem e o sistema explode em tempo finito. O vértice da parábola, em $u = 0$, corresponde ao instante em que se verifica o colapso do chão do cofre do Tio Patinhas.

que antes era estável perca a sua estabilidade: a pequena bola (ou gota de água) que anteriormente estava tranquilamente em repouso num vale, de repente encontrar-se-á no lado de uma encosta e deslizará para um novo ponto de mínimo do potencial (ou cairá sem nunca parar se todos os pontos de mínimo tiverem desaparecido). Neste caso, uma variação contínua dos parâmetros determina um salto descontínuo do estado do sistema: uma catástrofe, precisamente. Dado que, como vimos acima, interessa-nos identificar os pontos estacionários de V, com particular atenção para os que são estáveis, estudaremos a forma como, ao variar dos parâmetros de controlo, varia a estabilidade dos equilíbrios.

Se tomarmos o exemplo da figura 2 e procurarmos os pontos estacionários, da relação $V'(x) = 0$, obtemos $x^2 + u = 0$. No plano cartesiano com abcissa u (parâmetro de controlo) e ordenada x (variável interna, que determina o estado do sistema) obtém- se um lugar geométrico (é uma parábola), que representa o conjunto dos pontos estacionários ao variar do parâmetro u. Esta curva, desenhada na figura 3, representa o caso mais simples de catástrofe elementar, que se chama "dobra". Esta catástrofe intervém em todos aqueles modelos onde um sistema é conduzido de modo uniforme para um ponto de ruptura, como na história da moedinha que provoca o colapso do chão do cofre de Tio Patinhas. Esta situação é bem descrita por expressões coloquiais como "a gota que faz transbordar o vaso" ou "não esticar demasiado a corda (porque se parte)".

Até agora considerámos um exemplo muito particular, que é também o mais simples de todos. Poderia pensar-se que o número de casos qualitativamente diferentes que se podem apresentar seja enorme, se não mesmo infinito. Isto tornaria a teoria praticamente inutilizável para as aplicações, visto que quem quisesse aplicá-la a um modelo específico não saberia que tipo de catástrofe elementar escolher. E aqui está um dos pontos cruciais da teoria, contido num teorema de classificação topológica de Thom (1969). De acordo com este resultado, em sentido genérico e entre os sistemas dependentes de até *três parâmetros de controlo*, só há *cinco catástrofes elementares*. Para sistemas dependentes de, no máximo, *quatro parâmetros*, aos cinco modelos anteriores devemos juntar outros dois, num total de *sete catástrofes elementares*: o "mágico número 7" como escreve com alguma ironia Vladimir I. Arnol'd na introdução do seu livro [1]. Às setes catástrofes elementares foram dadas nomes sugestivos que lembram algumas características das superfícies constituídas pelos conjuntos de pontos críticos da função potencial. No caso da dobra, a "superfí-

[2] Que numa linguagem técnica se escreve como $x' = -\Delta V(x)$.



À esquerda, Hassler Whitney. À direita, Vladimir I. Arnol'd.

cie" é, de facto, uma curva plana, a parábola $x^2 + u = 0$, mas no caso de mais parâmetros temos superfícies mergulhadas no espaço tridimensional (a cúspide) e hipersuperfícies mergulhadas num espaço de dimensão 4 (a cauda de andorinha) ou superior. Para além da dobra, os nomes atribuídos às sete catástrofes elementares são os seguintes:

A cúspide, no caso de uma variável x e dois parâmetros de controlo, u, v, obtida a partir dos pontos críticos $(V'(x) = 0)$ do potencial

$$V(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ux^2 + vx.$$

A cauda de andorinha, no caso de uma variável x e três parâmetros de controle u, v, w, obtida a partir dos pontos críticos do potencial

$$V(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}ux^3 + \frac{1}{2}vx^2 + w.$$

E ainda **a borboleta**, **o umbigo hiperbólico** (*la vague*), **o umbigo elíptico** (*le poil*), e **o umbigo parabólico** (*le champignon*), para os quais não damos a expressão explícita do potencial por razões de espaço.

Em relação à figura 4, é interessante dar uma interpretação da curva, que tem forma de cúspide e que aparece a projectar a superfície dos pontos críticos sobre o plano dos parâmetros. Mais precisamente, a superfície de equação $f(u, v, x) = 0$, com $f(u\ v\ x) = x^3 + ux + v$ contém algumas dobras, no sentido de que tem algumas partes onde a superfície se enrola sobre si própria. Outras partes projectam-se de forma bijectiva sobre o plano *uv*, de equação *x = 0*. Para determinar a equação da cúspide, curva sobre a qual se projecta o contorno das dobras, procuram-se os pontos da superfície onde $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Sob esta afirmação esconde-se a utilização do Teorema da Função Implícita.

Com efeito, numa vizinhança dos pontos onde $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ (pontos ditos *regulares*) poderão descrever-se os pontos da superfície com x a depender de forma unívoca de *(u,v)*. Portanto, os pontos de dobra serão aqueles onde $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ (ditos pontos *singulares*).

Chega-se assim ao sistema de equações:

$$\begin{cases} x^3 + ux + v = 0 & \text{(equação de superfície)} \\ 3x^2 + u = 0 & \text{(condição de anulamento da derivada parcial } \partial f/\partial x\text{)} \end{cases}$$

Eliminando a variável x e tendo em conta que pela segunda equação deve ser $u \leq 0$, obtém-se por fim a equação da cúspide no plano *uv*:

$$9v^2 = 4u^3, \text{ com } u \leq 0.$$

As observações aqui feitas para este caso particular estão contidas numa teoria geral desenvolvida em 1955 pelo matemático americano Hassler Whitney (1907-1989) que, com o seu artigo "On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane onto the Plane", criou as bases para o estudo das singularidades de aplicações suaves entre superfícies. Como escreve de forma admirável o grande matemático Vladimir I. Arnol'd (1937-2010) no seu livro [1]: "Aplicações de superfícies regulares sobre o plano são tudo o que nos rodeia. Com efeito, a maioria dos objectos à nossa volta é limitada por superfícies suaves. Os contornos visíveis dos corpos são a projecção das suas superfícies sobre a retina do olho. Examinando os objectos que nos rodeiam, por exemplo os rostos das pessoas, podemos estudar as singularidades dos contornos visíveis." Usualmente vemos essas singularidades como *dobras* ou *cúspides*. A teoria de Whitney (e a de Thom, com ela relacionada) tem inúmeras aplicações em óptica (com as *cáusticas*, já estudadas por Newton e Huygens) e, em geral, na análise da propagação das frentes de onda (veja-se o reflexo de luz em forma de cúspide que aparece no líquido contido na chávena da foto).

Particularmente bela é, na minha opinião, a análise que Arnol'd faz sobre o trabalho de Zeldovič relativo à distribuição em grande escala da matéria

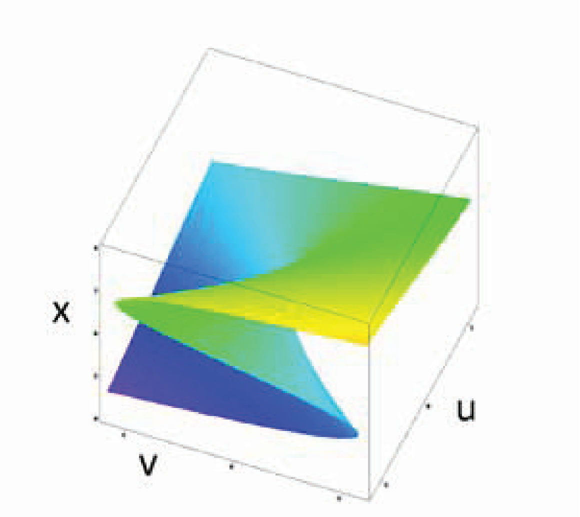


Figura 4: Superfície dos pontos críticos $V'(x) = x^3 + ux + v = 0$ no caso da catástrofe chamada **cúspide.** A variável x representa a altura, enquanto os parâmetros de controlo u e v são a abcissa e a ordenada no plano $x = 0$. Se a superfície for projectada no plano uv (imagine tirar uma foto de cima), irá aparecer o perfil de uma cúspide correspondente aos pontos onde a superfície se dobra sobre si própria.

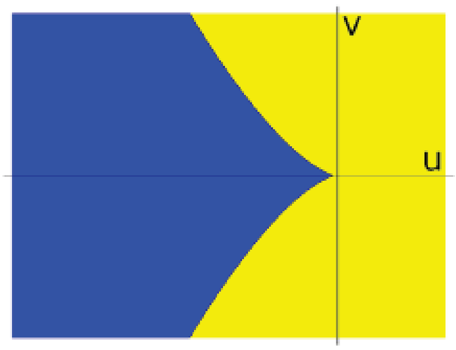


Figura 5: Cúspide no plano u,v. A zona de cor azul corresponde ao conjunto dos pontos do plano das variáveis de controlo por cima dos quais a superfície se dobra sobre si própria: por cima de cada ponto desta zona há três pontos da superfície. A zona de cor amarela é constituída pelos pontos (u, v) em correspondência dos quais há um único ponto da superfície. A cúspide que separa as duas áreas é o conjunto dos pontos (u, v), que satisfazem a equação $9v^2 + 4u^3 = 0, u \leq 0$.

no Universo, matematicamente equivalente à formação de singularidades de cáusticas.

A catástrofe de tipo cúspide talvez tenha sido a mais utilizada nas aplicações, de uma forma mais ou menos apropriada. Não é trivial como a dobra, e portanto permite uma descrição de fenómenos mais complexos. Para além disso, o conjunto dos pontos críticos é uma superfície que se pode visualizar no espaço (enquanto as catástrofes de ordem superior, descritas geometricamente por superfícies contidas num espaço de dimensão, pelo menos, 4, são visualizáveis apenas através das suas secções tridimensionais). Em [4], Woodcock e Davis utilizam modelos baseados, a maioria das vezes, na catástrofe de tipo cúspide para descrever não só aplicações bem conhecidas na física, mas também aplicações mais controversas (propostas por vários autores), tais como: o comportamento territorial dos animais, a agressão ou submissão de um cão que é provocado, algumas características comportamentais, tal como ser de temperamento solitário ou gregário, os comportamentos psicológicos de massa relacionados com a percepção do perigo, que podem aumentar ou diminuir a coesão de um exército, desencadear o pânico, dar início a motins, etc. Aplicações à política e à história têm tentado descrever o declínio e a queda do Império Romano, a ascensão de Hitler ao poder na Alemanha ou a "Primavera de Praga" (quando o livro saiu não tinha ainda caído o Muro de Berlim, caso contrário talvez houvesse também uma possível aplicação aos factos de 1989). Para além disso, a catástrofe de tipo cúspide foi usada para explicar eventos como a frequência cardíaca, as quebras das bolsas, os motins nas prisões, os confrontos entre grupos de adeptos exaltados nos estádios de futebol, a alternância de períodos de censura e períodos de permissividade em relação à difusão de pornografia, as alterações do ciclo vigília-sono e a análise de vários distúrbios psíquicos.

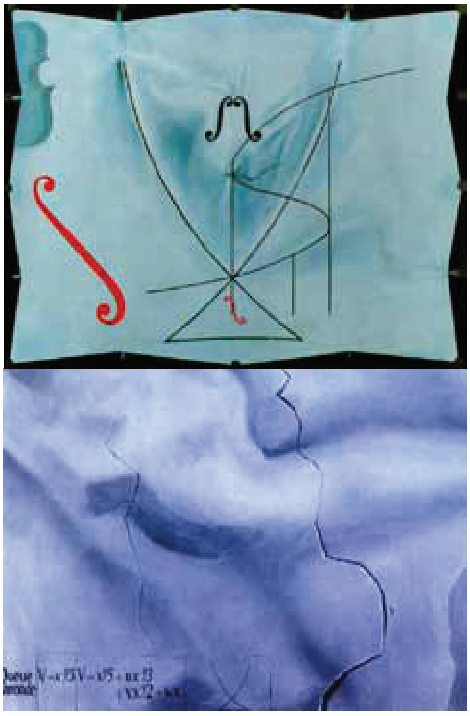
Um exemplo destas aplicações (atribuída à imaginação de Zeeman) é descrito por Arnol'd no seu livro, como se segue: uma personalidade criativa (por exemplo, um cientista) é caracterizada pelos parâmetros x = *sucesso*; $-u$ = *entusiasmo*; $-v$ = *competência técnica*.[3]

Observemos a figura 4 e a figura 5, e imaginemos que identificamos uma situação na qual se encontra a um determinado ponto da sua existência a pessoa que está a ser analisada. Se o entusiasmo $-u$ é pequeno (por exemplo, se u é positivo) estamos longe da zona da cúspide (estamos na zona amarela da figura 5). Neste caso não se verificará nada de inesperado. Se a competência técnica $-v$ aumentar, aumentará (lentamente) também o sucesso, no sentido em que o ponto

[3]Para ter uma descrição compatível com os gráfico das figuras 4 e 5, mudei os sinais de u e v, e portanto u muito negativo significa grande entusiasmo e v muito negativo significa grande competência.

da superfície crítica (figura 4) que representa a descrição da personalidade em análise mover-se-à de regiões mais baixas (em cima, à esquerda, na figura 4) para regiões mais altas (em cima, à direita, na figura 5) da superfície. Se porém o entusiasmo é alto, e, portanto, nos encontramos numa zona onde $u < 0$, ao crescer de $-v$ (isto é, aumentando a competência), poderemos atravessar a região azul. Neste caso, teremos uma mudança repentina, no sentido em que o ponto que representa a pessoa, originalmente em baixo à esquerda, na superfície da figura 4), no momento em que encontra a cúspide saltará imediatamente sobre o ponto que lhe fica por cima na parte mais alta da superfície. Como os pontos com x baixo dos quais partimos correspondem à pessoa entusiasta mas com pouca competência técnica e com pouco sucesso (no modelo, esta pessoa é chamada "maníaco"), o exemplo mostra como se pode saltar para o sucesso (os pontos com x alto sobre a dobra superior da superfície representam o sucesso de uma pessoa entusiasta e competente, denominada "génio" no exemplo em questão). Naturalmente, pode ocorrer também o percurso inverso: um entusiasta de sucesso não acompanhado pelo correspondente crescimento da competência poderá, de repente, cair na parte inferior da superfície, acabando na zona etiquetada como "maníaco". Exemplos como estes são altamente sugestivos, mas abrem o espaço para críticas, por vezes mesmo ferozes. Ninguém gosta de pensar que as manifestações da própria personalidade sejam descritíveis com só uma grandeza e dois parâmetros, como no modelo do cão que, se provocado, pode atacar ou recuar. Por outro lado, é preciso dizer que sobretudo Thom e Zeeman tinham um estilo convincente e também a audácia intelectual de propor pontos de vista novos baseados em modelos deste tipo. Arnol'd conclui mais à frente no seu livro que "felizmente, os belos resultados da teoria das singularidades não dependem do *dark misticism* da teoria das catástrofes."

E a propósito de misticismo, quero concluir com uma anedota curiosa. O grande pintor surrealista Salvador Dalí (1904-1989), nos últimos anos da sua vida (a partir de 1978, aproximadamente) ficou fascinado com a teoria das catástrofes. Conheceu pessoalmente René Thom e em 1983 quis dedicar-lhe um quadro baseado no mito de Europa e intitulado *El Rapto Topológico de Europa – Homenaje a René Thom*. O tema da pintura é depois retomado num pormenor do quadro *A Cauda da Andorinha* (*La Queue d' Aronde – Série des Catastrofes*). O desenho central deste último é tirado directamente de uma projecção tridimensional da catástrofe *cauda de andorinha* de Thom. É bem conhecido que Dalí era fascinado pelo conceito de quarta dimensão, que quis explorar nalgumas das suas obras anteriores. No quadro *A cauda da Andorinha* estão presentes também uma cúspide e um símbolo musical (associado à figura de um violoncelo) que porém é também o símbolo do integral. Conta-se que Dalí achava que a sala de espera da estação de comboios da cidade de Perpignan (capital da região dos Pirinéus Orientais, no sul de França), onde em 19 de Setembro de 1963 teve uma visão de êxtase cósmica, fosse o centro do universo. Vários anos depois, Dalí teve o seu único encontro com René Thom, que lhe confidenciou que naquele momento estava a estudar a teoria das placas e os movimentos da crosta terrestre. A uma pergunta do pintor catalão, parece que o matemático francês confirmou que alguns milhões de anos antes a Península Ibérica tinha rodado, tendo como fulcro o lugar onde hoje se encontra a estação de Perpignan. O artista pintou sucessivamente a sua homenagem a René Thom, repro-



O Rapto Topológico de Europa e *A Cauda de Andorinha*, segundo Salvador Dalí.

duzindo no canto inferior esquerdo da obra exactamente a expressão de potencial que descreve a catástrofe de tipo cúspide. O quadro é uma das últimas pinturas de Dalí sobre tela, e num primeiro momento alguns críticos consideraram-na um rabisco senil de uma pessoa que já sofria de alucinações. Todavia, uma crítica posterior reavaliou a obra e encontrou uma incrível semelhança entre as fracturas desenhadas por Dalí sobre a tela e alguns percursos rodoviários para Narbonne (a norte de Perpignan). Mas Dalí, de acordo com alguns testemunhos, traçou aqueles signos sem ter à sua frente um mapa rodoviário dessa zona. Delírios de um velho louco ou os últimos relâmpagos de um génio?

Indico abaixo algumas referências bibliográficas onde o leitor interessado poderá aprofundar alguns aspectos da teoria das catástrofes que neste trabalho foram apenas mencionados. Para além do livro fundamental [3], assinalo uma síntese de divulgação, muito acessível, de Woodcock e Davis [4]. Quero também lembrar os livros de Arnol'd [1] e [2], na minha opinião, muito belos embora um pouco difíceis, onde se pode encontrar uma visão diferente sobre o tema bem como vários exemplos de aplicações. Obviamente, há uma ampla literatura especializada que se pode encontrar nas bibliotecas universitárias. Na *web*, pode encontrar-se facilmente um artigo do matemático francês Ivar Ekeland em "La Récherche" de 1977, onde o autor apresenta uma exposição que me parece muito clara do trabalho de Thom. Por fim, o livro do Saunders [8] é um excelente ponto de partida para um leitor que tenha conhecimentos de matemática.

As notas históricas com as quais tentei enquadrar a obra de alguns protagonistas da teoria das catástrofes estão disponíveis na página de história da matemática *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/*, tal como algumas imagens que descarreguei livremente e utilizei neste artigo.

Por fim, os meus agradecimentos sinceros ao Alessandro Margheri, pelo convite de submeter um trabalho e pela sua tradução.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Arnol'd, V. I.: "Catastrophe theory". Second edition. Translated from the Russian by G. S. Wassermann. Based on a translation by R. K. Thomas. Springer-Verlag, Berlin, 1986. xiv+108 pp.

[2] Arnol'd, V. I., Huygens and Barrow, Newton and Hooke. "Pioneers in Mathematical Analysis and Catastrophe Theory from Evolvents to Quasicrystals". Translated from the Russian by Eric J. F. Primrose. Birkha¨user Verlag, Basel, 1990. 118 pp.

[3] Thom, R., "Structural Stability and Morphogenesis. An Outline of a General Theory of Models". Translated from the French by D. H. Fowler. With a foreword by C. H. Waddington. Second printing. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass.--London-Amsterdam, 1976. xxv+348 pp.

[4] Woodcock, A. and Davis, M., "Catastrophe Theory". E. P. Dutton, New York, 1978. viii+152 pp.

[5] Zeeman, E. C., "Catastrophe Theory. Selected Papers, 1972-1977". Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1977. x+675 pp.

[6] Gilmore, R., "Catastrophe Theory for Scientists and Engineers". (English summary) Reprint of the 1981 original. Dover Publications, Inc., New York, 1993.

[7] Poston, T. and Stewart, I., "Catastrophe Theory and Its Applications". With an appendix by D. R. Olsen, S. R. Carter and A. Rockwood. Reprint of the 1978 original. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1996. xviii+491 pp.

[8] Saunders, Peter T., "An Introduction to Catastrophe Theory". Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980. xii+144 pp.

SOBRE O AUTOR

Fabio Zanolin nasceu em Trieste. É professor catedrático de Análise Matemática. Desde 1987 é docente da Universidade de Udine. É autor de vários artigos de investigação sobre a teoria dos pontos fixos e sobre as aplicações dos métodos topológicos e da análise não linear às equações diferenciais. Há alguns anos tem-se ocupado também da divulgação da cultura matemática, quer através de artigos e conferências públicas, quer como colaborador do projecto "Laurée Scientifiche" do Ministério da Educação italiano, cujo objectivo é o de contrariar a diminuição das inscrições nas faculdades de ciências. Este artigo é uma versão ampliada de um trabalho publicado recentemente no número especial, entitulado "Crac", da revista *Multiverso*.