Sangaku
Desafios Matemáticos nos Templos do Japão

Margarida Matias Pinto
mmatiaspinto@gmail.com

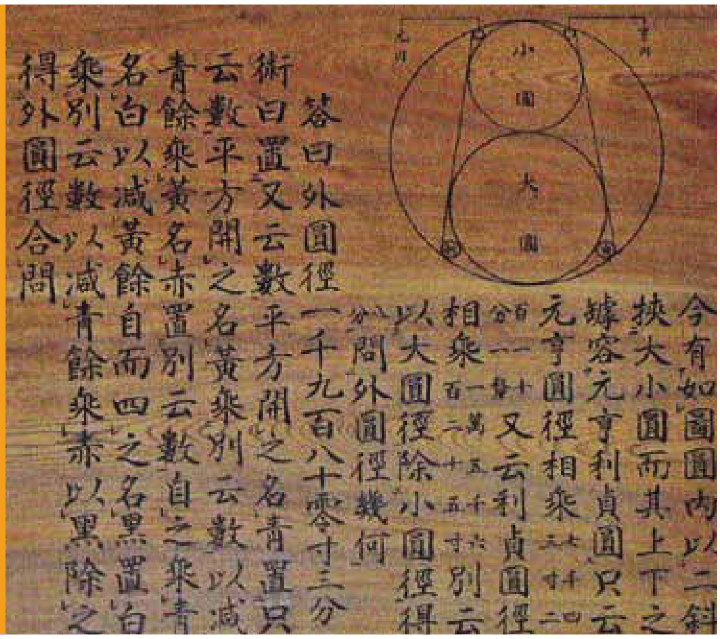
Sob os telhados de alguns templos budistas e xintoístas do Japão podem ainda ver-se exemplares de *sangaku*, tábuas de madeira pintadas com coloridos desenhos geométricos. Neles encontramos problemas de geometria euclidiana nos quais círculos, elipses, quadrados, cones, cilindros... se intersectam. Alguns são suficientemente simples para poderem ser resolvidos por alunos dos ensinos básico e secundário e pouco mais exigem do que o teorema de Pitágoras e casos de semelhança de triângulos, outros requerem ferramentas avançadas como integrais, séries ou transformações afins. Os *sangaku* floresceram no período Edo, nos séculos XVII a XIX, altura em que o Japão auto-impôs o isolamento em relação ao Ocidente. Eram colocados nos templos tanto por cidadãos comuns que manifestavam aos deuses a sua gratidão pela ajuda concedida na resolução de um problema particularmente difícil da vida real, como por matemáticos consagrados que pretendiam lançar um desafio aos seus pares. Também os jovens aspirantes a matemáticos os afixavam, exprimindo o seu talento, desejosos de chamar a atenção dos mestres e de, assim, conseguirem ser convidados a ingressar numa escola para prosseguirem os seus estudos. Serviam ainda como difusor de conhecimentos e veículo de publicidade das escolas que enviavam representantes às zonas remotas do país e que, ao afixar uma tábua num templo, anunciavam aos habitantes a chegada de um mestre.

No texto que se segue apresentamos alguns exemplos de *sangaku* que envolvem essencialmente aplicações do teorema de Pitágoras, semelhanças de triângulos e resolução de equações de 1.º e 2.º graus e que, por isso, podem ser abordados por alunos do 3.º ciclo do ensino básico.

É importante dizer que a falta de rigor nos enunciados dos problemas que se seguem é deliberada e justifica-se por serem os *sangaku* essencialmente visuais e, em geral, pouco mais incluírem do que o desenho, o desafio, a solução e o nome do autor. Assim, embora nada seja afirmado, assume-se que as figuras respeitam aquilo que os olhos nos dizem, que os triângulos que aparentam ser equiláteros, isósceles ou rectângulos o são realmente, que dois círculos que se tocam são tangentes. . . Apesar da decisão que tomámos, consideramos que, quando se trabalhar com jovens estudantes, têm de constar no enunciado todos os dados completos.

É também assumido que o leitor tem conhecimentos básicos de geometria e, por isso, se omitem algumas justificações que serão necessárias para alunos dos ensinos básico e secundário.

Para que servem as tábuas pintadas com desafios geométricos colocadas em templos do Japão? Quem as colocou lá, quando e com que fim?



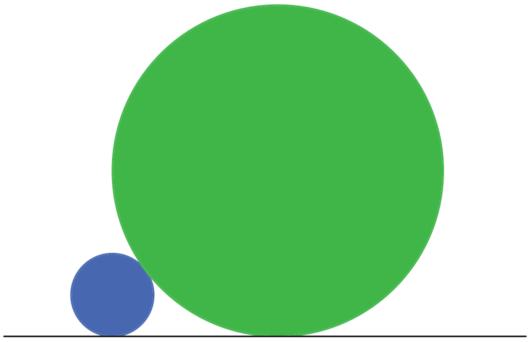


Figura 1

PROBLEMA 1

Relacionar a distância dos pontos de tangência da recta com os círculos e os seus raios.

Resolução

Sejam A e B os pontos de tangência da recta com os círculos, C_1 e r_1 o centro e o raio do círculo maior e C_2 e r_2 o centro e o raio do círculo menor (figura 2).

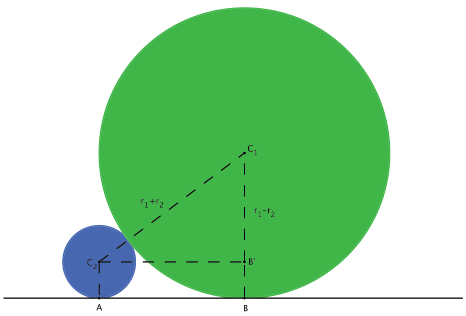


Figura 2

Tracemos o segmento que une os centros dos dois círculos e seja B' o pé da perpendicular baixada de C_1 para a paralela a AB que passa por C_2. (Deixa-se ao cuidado do leitor concluir que o ponto de tangência dos dois círculos pertence a C_1C_2.)

Consideremos o triângulo, rectângulo, $[C_1C_2B']$, cujos lados medem (r_1+r_2), (r_1-r_2) e $\overline{AB}$. Por aplicação do teorema de Pitágoras obtemos:

$$(r_1+r_2)^2 = \overline{AB}^2 + (r_1-r_2)^2$$

donde

$$r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = \overline{AB}^2 + r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2$$

ou seja

$$\overline{AB}^2 = 4r_1r_2.$$

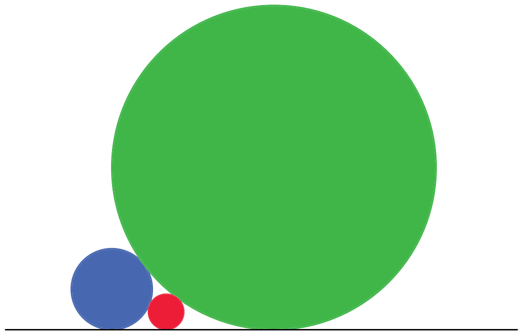


Figura 3

PROBLEMA 2

Relacionar os raios dos três círculos.

Resolução

Sejam A, B e C os pontos de tangência da recta com os círculos de raios r_1, r_2 e r_3 (figura 4).

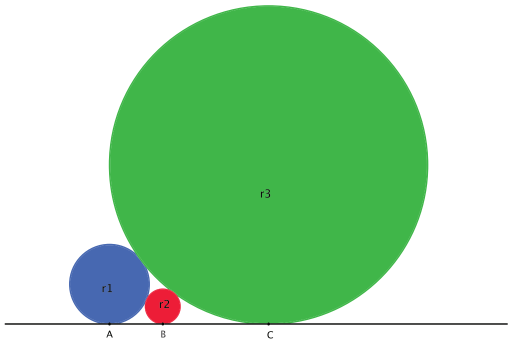


Figura 4

Aplicando o resultado do problema 1 temos:

$$\overline{AB}^2 = 4r_1r_2,\ \overline{AC}^2 = 4r_1r_3 \text{ e } \overline{BC}^2 = 4r_2r_3$$

ou:

$$\overline{AB} = 2\sqrt{r_1r_2},\ \overline{AC} = 2\sqrt{r_1r_3} \text{ e } \overline{BC} = 2\sqrt{r_2r_3}.$$

Como

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

então

$$2\sqrt{r_1r_3} = 2\sqrt{r_1r_2} + 2\sqrt{r_2r_3}$$

e, divididindo por $2\sqrt{r_1r_2r_3}$:

$$\frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}.$$

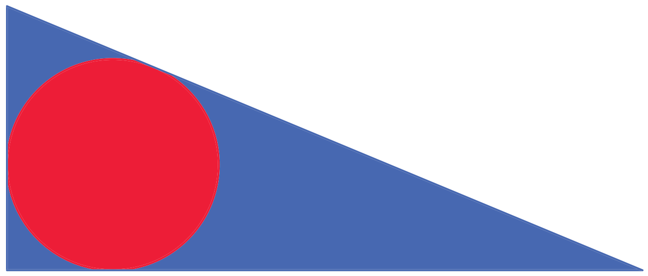


Figura 5

PROBLEMA 3

Exprimir o raio do círculo em função dos lados do triângulo.

Resolução

Sejam x, y e z os lados do triângulo, r o raio do círculo e M, N e P os pontos de tangência do círculo com os lados do triângulo, conforme a figura 6. Deixamos ao cuidado do leitor justificar que $\overline{AN} = \overline{AM}$ e $\overline{BN} = \overline{BP}$.

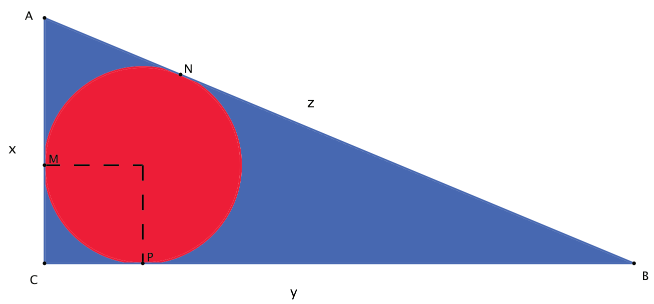


Figura 6

Seja $\overline{AN} = \overline{AM} = a$ e $\overline{BN} = \overline{BP} = b$. Podemos, assim, escrever os comprimentos dos lados do triângulo como $x = a + r$, $y = b + r$ e $z = a + b$. Se calcularmos os valores de $a = x - r$ e $b = y - r$ nas duas primeiras condições e substituirmos na terceira, temos, sucessivamente:

$$z = a + b = x + y - 2r$$

e a expressão que relaciona o raio do círculo com os lados do triângulo é:

$$r = \frac{x + y - z}{2}.$$

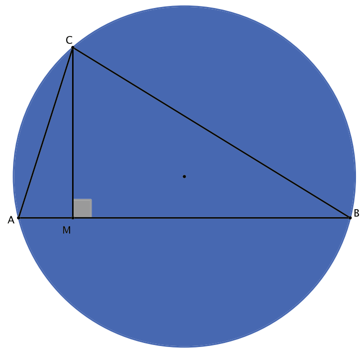


Figura 7

PROBLEMA 4

Calcular o raio do círculo a partir de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CM}$.

Resolução

Comecemos por traçar $[CE]$, diâmetro de extremos C e E e o triângulo $[BCE]$ (figura 8). Os triângulos $[ACM]$ e $[BCE]$ são semelhantes pois:

– $C\hat{A}B = C\hat{E}B$ (ângulos inscritos no mesmo arco)

– $A\hat{M}C = C\hat{B}E = 90^{\circ}$

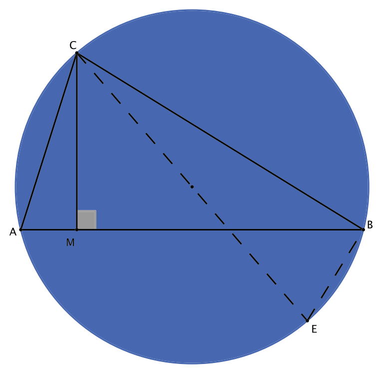


Figura 8

Da semelhança dos dois triângulos concluímos que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}$$

ou seja

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CM}} = \frac{2r}{\overline{AC}}$$

donde

$$r = \frac{\overline{BC} \times \overline{AC}}{2\overline{CM}}.$$

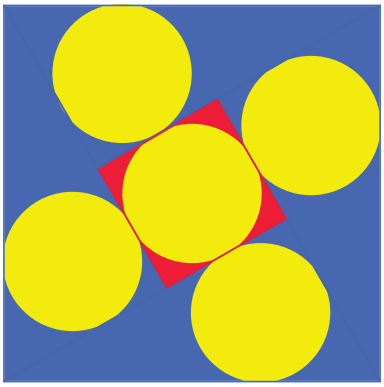


Figura 9

PROBLEMA 5

Relacionar o lado do quadrado com o raio dos círculos inscritos.

Resolução

Chamemos r ao raio do círculo e a, b e c às medidas dos lados do triângulo $[ABC]$, ordenadas por ordem crescente (figura 10). O problema 4 garante-nos que o raio da circunferência inscrita no triângulo é $r = \frac{a+b-c}{2}$.

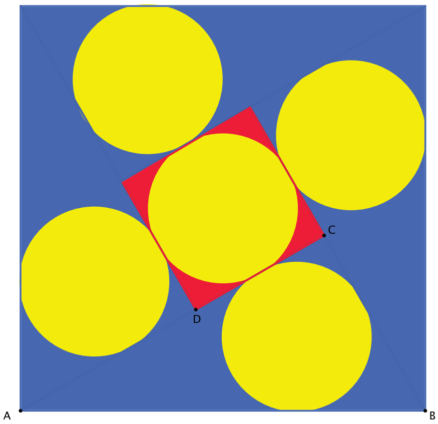


Figura 10

Por outro lado, como $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC}$, temos $a + 2r = b$, donde $r = \frac{b-a}{2}$.

Da conjunção dos dois valores obtidos para r concluímos que $\frac{a+b-c}{2} = \frac{b-a}{2}$, ou seja, que $c = 2a$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $[ABC]$, temos $c^2 = a^2 + b^2$ e, substituíndo c pelo valor atrás encontrado, obtemos a equação $4a^2 = a^2 + b^2$ cuja solução positiva é $b = \sqrt{3}a$.

Regressando a $r = \frac{b-a}{2}$ e efectuando sucessivamente as substituições $b = \sqrt{3}a$ e $a = \frac{c}{2}$, temos:

$$r = \frac{\sqrt{3}a - a}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a = \frac{\sqrt{3}-1}{4}c.$$

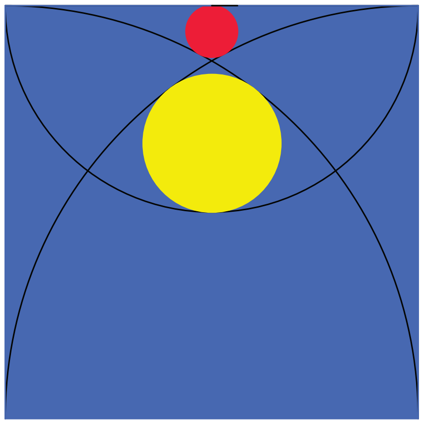


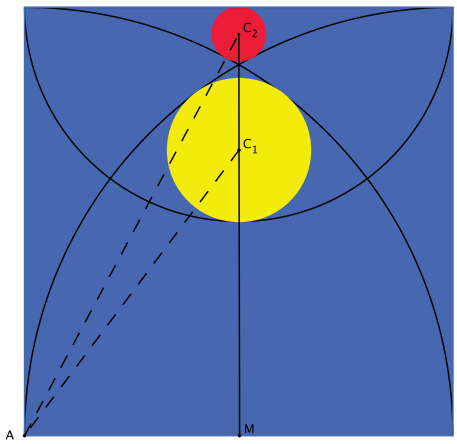
Figura 11

PROBLEMA 6

Escrever os raios dos círculos como função do lado do quadrado.

Resolução

Sejam a, r_1 e r_2 respectivamente as medidas do lado do quadrado e dos raios dos círculos de centros C_1 e C_2 e tracemos $[C_2M]$, segmento que passa por C_1 e intersecta o lado do quadrado no seu ponto médio M (justificação deixada ao cuidado do leitor). Tracemos também os segmentos $[AC_1]$ e $[AC_2]$.



O triângulo $[AMC_1]$ é rectângulo de lados $\overline{AM} = \frac{a}{2}$, $\overline{C_1M} = \frac{a}{2} + r_1$ e $\overline{AC_1} = a - r_1$. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{AC_1}^2 = \overline{C_1M}^2 + \overline{AM}^2$$

ou

$$(a - r_1)^2 = \left(\frac{a}{2} - r_1\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Resolvendo em ordem a r_1, obtemos a solução:

$$r_1 = \frac{a}{6}.$$

Consideremos agora o triângulo rectângulo $[AC_2M]$ de lados $\overline{AM} = \frac{a}{2}$, $\overline{AC_2} = a + r_2$ e $\overline{C_2M} = a - r_2$. Aplicando o teorema de Pitágoras, concluímos que:

$$(a + r_2)^2 = (a - r_2)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

donde

$$r_2 = \frac{a}{16}.$$

Resumindo: os raios das circunferências maior e menor podem ser escritos em função do lado do quadrado respectivamente como:

$$r_1 = \frac{a}{6} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{a}{16}$$

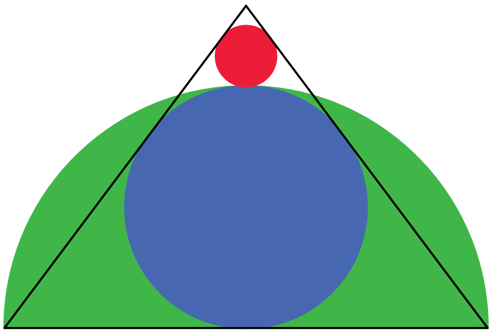


Figura 13

PROBLEMA 7

Relacionar os raios dos dois círculos com o do semicírculo.

Resolução

Sejam $h = \overline{CM}$ a altura do triângulo $[ABC]$, r o raio do semicírculo, s o raio do círculo de centro E, F e G os pontos de tangência de cada um dos círculos com AC. Tracemos os raios $[EF]$ e $[DG]$ (figura 14).

É imediato concluir que o círculo tem raio$= \frac{r}{2}$.

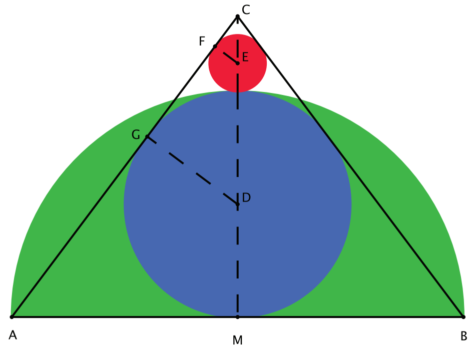


Figura 14

No triângulo $[ACM]$, rectângulo, de catetos $\overline{AM} = \frac{r}{2}$ e $\overline{CM} = h$, a hipotenusa mede $\overline{AC} = \sqrt{h^2 + r^2}$. No triângulo $[CDG]$, rectângulo, temos $\overline{CD} = h - \frac{r}{2}$ e $\overline{DG} = \frac{r}{2}$. Como estes dois triângulos são semelhantes pois têm os ângulos iguais, podemos afirmar que:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{AM}}$$

ou seja

$$\frac{h - \frac{r}{2}}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{\frac{r}{2}}{r}$$

e, desenvolvendo e simplificando, chegamos à equação: $3r^2h^2 - 4r^3h = 0$ que admite como solução positiva:

$$h = \frac{4}{3}r.$$

Efectuando a substituição $h = \frac{4}{3}r$ em $\overline{AC} = \sqrt{h^2 + r^2}$, obtemos $\overline{AC} = \frac{5}{3}r$.

Consideremos agora o triângulo $[CEF]$ em que $\overline{EF} = s$ e $\overline{CE} = h - r - s = \frac{4}{3}r - r - s = \frac{1}{3}r$. Os seus ângulos são iguais aos do triângulo $[ACM]$, pelo que, da semelhança dos dois triângulos, podemos concluir que:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AM}}$$

donde

$$\frac{\frac{1}{3}r - s}{\frac{5}{3}r} = \frac{s}{r}$$

e, resolvendo em ordem a s, obtemos sucessivamente:

$$\frac{1}{3}r - s = \frac{5}{3}s$$

$$s = \frac{1}{8}.$$

Em resumo, os raios dos círculos de centros D e E expressos em função do raio do semicírculo são, respectivamente, $\frac{r}{2}$ e $\frac{1}{8}r$.

Terminamos com o enunciado de um *sangaku* simples cuja resolução deixamos a cargo do leitor.

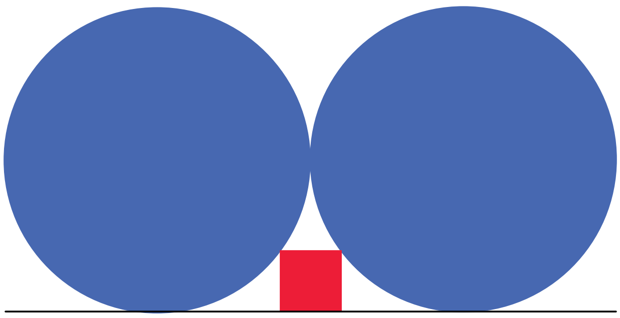


Figura 15

PROBLEMA 8

Escrever o lado do quadrado em função do raio dos círculos (figura 15).

Embora tenha sido referido no início, não é demais realçar que a aqui intencional falta de dados nos enunciados dos problemas não pode existir em contexto de aprendizagem e que, pelo menos nesse caso, os enunciados devem ser reescritos de

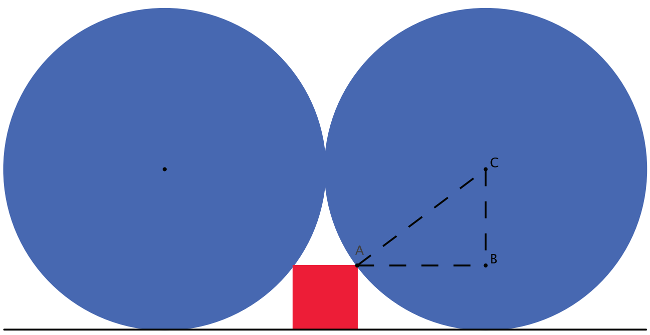


Figura 16

modo a conter todos os pressupostos. Por exemplo, ao texto do problema 4 deve acrescentar-se que o triângulo é rectângulo e que o círculo é tangente a cada um dos seus três lados.

Além dos livros citados na bibliografia, o leitor interessado encontra na *web* diversos problemas bem como fotografias de *sangaku*. Uma palavra especial para o livro de Fukagawa e Rothman que, além do elevado número de problemas, preenche boa parte das suas páginas com uma viagem fascinante à história da matemática no Japão.

BIBLIOGRAFIA

(1) Capitán, Francisco Javier, *Problemas* San Gaku, Córdoba, 2003.

(2) Fukagawa, Hidetoshi, e Rothman, Tony, *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, Princeton, New Jersey, 2008.

(3) Huvent, Guéry, Sangaku, *Le Mystère des Énigmes Géométriques Japonaises*, Paris, 2008.

SOBRE A AUTORA

Margarida Matias Pinto é Mestre em Ensino da Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Foi professora do ensino secundário e assistente do departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, tendo também leccionado cadeiras do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Nos últimos anos trabalhou na Sociedade Portuguesa de Matemática onde desempenhou, entre outras, actividades de coordenação das Olimpíadas Portuguesas de Matemática.