Importância da Observação em Matemática

José Morgado
Centro de Matemática, Faculdade de Ciências do Porto

Pessoas não familiarizadas com a Matemática ficam por vezes surpreendidas, quando ouvem dizer que a Matemática também é uma ciência de observação.

1. Gauss

Vem a propósito lembrar um caso que se conta acerca de Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), quando era aluno da instrução primária. O seu professor, J. G. Büttner, deu como exercício para ser resolvido na aula, *calcular a soma dos 100 inteiros,* 1, 2, 3, ... , 100. Mal o professor acabara de enunciar o exercício, o jovem Gauss levantou-se e pousou a sua lousa na secretária do professor, dizendo: *aqui está*. Tinha escrito um único número na lousa: o número 5050.

O professor ficou muito admirado e quis naturalmente saber como é que Gauss tinha encontrado tão rapidamente aquele resultado. Gauss disse-lhe ter observado que

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 50 + 51 = 101.$$

Assim, o conjunto dos números dados poderia considerar-se formado por 50 grupos de dois números cuja soma é 101. Por consequência, a soma dos 100 números considerados é igual a 101 x 50 ou seja 5050, "resultado que obtive por simples cálculo mental." Gauss teria então 10 anos, segundo uns autores, e teria apenas 8, segundo outros.

Na verdade, o que interessa destacar é a observação do jovem aluno Gauss ter permitido transformar aquela soma de 100 parcelas num simples produto de dois factores, 101 x 50.

Gauss, como se sabe, foi um dos maiores Matemáticos de todos os tempos. Como pode ler-se na *Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura*, ele mesmo dizia que "aprendeu a calcular antes de aprender a falar".

Aos 19 anos, Gauss estava ainda hesitante entre seguir Matemática e seguir Filosofia, uma vez que gostava muito de Matemática e gostava também muito de Latim e de Grego. Mas, em 30 de Março de 1796, exactamente um mês antes de atingir a idade de 20 anos, conseguiu resolver um problema formulado, mas não resolvido, cerca de 2000 anos antes: conseguiu construir, com régua e compasso, um polígono regular de 17 lados; por outras palavras, conseguiu dividir a circunferência em 17 partes iguais. Diz-se ter sido esta descoberta que o decidiu a seguir Matemática.

Começou então a organizar o seu diário científico onde tomava notas das descobertas que ia fazendo. Por ele se pôde concluir que Gauss elaborou trabalhos de investigação nos vários ramos da Matemática, especialmente em *Teoria dos Números*.

É de Gauss a seguinte frase:

A Matemática é a rainha das ciências e a Teoria dos Números é a rainha da Matemática.

Na escrita do seu diário científico, usou uma criptografia especial. Por exemplo, para registar, em 10 de Julho de 1796, a sua descoberta de que *todo o inteiro maior que 1 pode ser escrito como soma de, quando muito, três parcelas, cada uma das quais é um número triangular* [1], Gauss escreveu o seguinte:

E Y P H K A ! num = $\Delta + \Delta + \Delta$.

A palavra Ε Υ Ρ Η Κ Α ! significa *Eureka!* (grito de triunfo a uma descoberta, por exemplo: Achei!).

O enunciado da proposição escrita por Gauss tinha sido dado (mas não demonstrado) por Pierre de Fermat (1601(?) – 1665).

Howard Eves, no seu livro *An Introduction to the History of Mathematics*[2] , p.521 da edição de 1995, lembra que Gauss foi descrito como

o gigante matemático que, do alto da sua magnitude, abarca num relance as estrelas e os abismos.

2. Sylvester

Outro grande matemático a chamar a atenção para a importância da observação foi James Joseph Sylvester (1814 – 1897). No seu artigo intitulado *The Study That Knows Nothing of Observation* e publicado no 3º vol. da colecção *The World of Mathematics*, pp.1729-1736, Sylvester declara:

A maior parte, se não a totalidade, das grandes ideias dos matemáticos modernos tem tido a sua origem na observação.

No mesmo artigo, Sylvester afirma o seguinte a respeito de Joseph Louis Lagrange (1736–1813): "Lagrange, e nenhuma autoridade maior que a sua podia ser citada, exprimia enfaticamente a sua crença na importância da faculdade de observação para a matemática."

Karl Weierstrass (1815–1897), um dos maiores matemáticos de todos os tempos, tinha afirmado: "Um matemático que não é um tanto poeta, nunca será um matemático completo."[3]

Ora, Sylvester não foi apenas um matemático; foi também um poeta[4] . Como Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), Sylvester foi um dos maiores criadores de termos da História da Matemática[5] .

De 1855 a 1869, ensinou na *Real Academia Militar, de Woolwich*. Esteve duas vezes na América: como professor da *Universidade de John Hopkins* em Baltimore (1876 – 1833), e na *Universidade de Oxford*. Era membro da *Royal Society* desde 1839 e fundou a revista *American Journal of Mathematics*, em 1878. No tempo decorrido entre as duas estadias na América, trabalhou em Londres como actuário para uma companhia de seguros.

Durante a segunda estadia na América, Sylvester foi dos primeiros a firmar trabalho matemático avançado nas Universidades americanas. Pode dizer-se que, com o ensino de Sylvester, começaram a florescer as Matemáticas nos Estados Unidos.

Sylvester aceitou um lugar de Professor em Oxford, em 1885 e ocupou esse lugar até à sua morte, em 15 de Março de 1897 [6] .

3. Weierstrass

Karl Weierstrass, durante grande parte da sua vida, ensinou numa escola não universitária; a sua carreira como professor universitário foi iniciada quando ele tinha 49 anos, idade em que muitos matemáticos já deixaram de fazer investigação. Era um professor pontual, no entanto, não compareceu uma manhã em que devia começar sua aula às 8 horas.

O Director foi à sua residência saber o motivo da sua

---

[1] Isto é, cada uma é um número da forma $\frac{n(n+1)}{2}$, com *n* inteiro positivo.

[2] Traduzido para a nossa língua por Hygino Domingues.

[3] A *first Undergraduate Course*, by Abraham Hillman & Gerald Alexanderson (1973), p.71.

[4] Sylvester, além do opúsculo intitulado *The Laws of Verse*, escreveu um poema, Rosalind, que consiste em 400 versos, cada um dos quais rima com Rosalind (*A History of Mathematics*, de Florian Cajori, 3ª ed. (1980), Chelsea Publishing Company, New York).

[5] Por exemplo, *invariante, contra-variante, covariante, Hessiano, Jacobiano.*

[6] Como Professor, Weierstrass alcançou grande prestígio; como escreveu Howard Eves, no seu livro *Introdução à História da Matemática*, edição de 1995, suas aulas eram meticulosamente preparadas e foram um exemplo para futuros matemáticos. Como declara Howard Eves, Weierstrass "foi a consciência matemática por excelência".

falta, agravada pelo tumulto que os estudantes faziam. Ficou surpreendido ao encontrar Weierstrass num quarto escuro onde tinha passado toda a noite, ainda a trabalhar, sem dar conta de que já era dia claro! Quando o Director lhe disse que os estudantes estavam à sua espera, fazendo muito barulho, Weierstrass pediu-lhe que o desculpasse, pois estava à beira de conseguir uma importante descoberta matemática que, em sua opinião, iria surpreender o mundo científico.

Weierstrass foi, em 1856, nomeado *Professor do Instituto Industrial de Berlim* e, depois *Professor Associado da Universidade de Berlim*. Foi membro da *Academia das Ciências de Berlim*.

4. Que observar?

Além dos matemáticos que citámos – Gauss, Sylvester, Lagrange, Weierstrass, Fermat – muitos outros podiam ser citados como defensores da *grande importância que a observação tem nas descobertas matemáticas*.

Vejamos alguns casos.

1) *Suponhamos que a sucessão*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

é uma progressão aritmética e que p e q são inteiros distintos tais que

$$a_p = q \ \text{ e } \ a_q = p. \tag{2}$$

Calcule a_m.

Em virtude de em (1) estar uma progressão aritmética tem-se, por um lado

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = \ldots = r,$$

onde r é a razão da progressão; por outro lado

$$a_m = a_p + (m-p)r \quad \text{e} \quad a_m = a_q + (m-q)r$$

de onde se conclui, atendendo a (2), que:

$$a_m = q + (m-p)r = p + (m-q)r;$$

segue-se $q - pr = p - qr$, ou seja $q - p = (p-q)r$, o que significa $r = -1$, uma vez que $p \neq q$.

Como $a_m = q + (m-p)r$, tem-se $a_m = p + q - m$.

2) *Suponhamos que os números positivos*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad (n \geq 2)$$

estão em progressão aritmética. Mostre que:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

Observe-se que, para n = 2, o primeiro membro da igualdade anterior se reduz precisamente ao 2º membro $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}$. Esta observação sugere que utilizemos o método de indução matemática na forma: *Se a igualdade considerada é válida para n = 2 e se a sua validade para n implica a validade para n + 1, então a igualdade é válida para todo inteiro* $n \geq 2$.

Suponhamos então que a equação (3) é válida para o inteiro n: é claro que em tal caso se tem

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}\right) + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$$

$$= \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}} + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$$

$$= \frac{(n-1)(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})}{a_n - a_1} + \frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n+1}-a_n}$$

$$= \frac{(n-1)(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})}{(n-1)r} + \frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{r}$$

$$= \frac{a_1 + nr - a_1}{r(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}})} = \frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}},$$

o que prova a validade de (3) para $n+1$, como pretendíamos.

Outro processo de resolução

É claro que foi útil a observação inicial: a igualdade (3) é trivialmente válida para n=2; pois esta observação sugeriu que utilizássemos o método de indução matemática. Mas não será possível utilizar alguma outra observação que conduza mais rapidamente ao resultado desejado?

Ora, vejamos:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\ldots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{r}+\ldots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{r}$$

$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{r}=\frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}{r(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}$$

$$=\frac{a_n-a_1}{r(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}=\frac{(n-1)r}{r(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}$$

$$=\frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}$$

c.p.d.

3) *Calcular a soma* 1 + 11 + 111 + 1111 + ... + 111...1 *em função do número n de parcelas.*

Designando por S a soma procurada tem-se

$$S=n+(n-1)10+(n-2)10^2+\ldots+\left[n-(n-1)\right]10^{n-1}$$

$$=n\ (1+10+10^2+\ldots+10^{n-1})-\left[10+2\times10^2+3\times10^3+\ldots+(n-1)10^{n-1}\right]$$

$$= s_1-10s_2,$$

onde $s_1=n(1+10+10^2+\ldots+10^{n-1})=\dfrac{n(1-10^n)}{1-10}=\dfrac{(10^n-1)n}{9}$

e $s_2=1+2\times10+3\times10^2+\ldots+(n-1)10^{n-2}.$

Observemos que a soma s_2 é da forma

$$\sum_{j=1}^{n-1} j\,x^{j-1}\text{, com } x=10.$$

Ora, $j\,x^{j-1}$ é a derivada de x^j com respeito a x.

Logo, tem-se

$$s_2=\frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{n-1}x^j\Big|_{x=10}=\frac{d}{dx}(x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1})\Big|_{x=10}$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{x-x^n}{1-x}\bigg|_{x=10}$$

$$= \frac{\left[1-nx^{n-1}\right](1-x)+(x-x^n)}{(1-x)^2}\Bigg|_{x=10}$$

$$= \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1}+1}{(1-x)^2}\Bigg|_{x=10}$$

$$= \frac{(n-1)\,10^n - n\ 10^{n-1}+1}{9^2}$$

e, portanto,

$$S = s_1 - 10s_2$$

$$= \frac{n10^n - n}{9} - \frac{(n-1)10^{n+1} - n\ 10^n + 10}{81}$$

$$= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}.$$

Outro processo de resolução

A soma procurada pode escrever-se

$$S = \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \ldots + \frac{10^n-1}{9}$$

$$= \frac{10+10^2+10^3+\ldots+10^n}{9} - \frac{n}{9}$$

$$= \frac{10^{n-1}-10}{9^2} - \frac{n}{9}$$

$$= \frac{10^{n-1}-9n-10}{81}.$$

Este é um processo bem mais rápido.

4) *Determinar as raízes reais do sistema de equações*

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x^4+y^4=641 \end{cases} \qquad (4)$$

Atendendo a que $y=x-3$, a 2ª equação do sistema pode ser escrita como

$$x^4+(x-3)^4=641,$$

ou seja,

$$2x^4-12x^3+54x^2-108x+81=641,$$

o que equivale a

$$x^4-6x^3+27x^2-54x-280=0.$$

Como $(x^2-3x)^2=x^4-6x^3+9x^2$, a equação anterior pode ser escrita como

$$(x^2-3x)^2+18(x^2-3x)-280=0. \qquad (5)$$

Pondo $x^2-3=z$, vem $z^2+18z-280=0$, donde

$$z=-9\pm\sqrt{81+280}=-9\pm\sqrt{361}=-9\pm 19,$$

tendo-se portanto $z=10$ ou $z=-28$; $z=10$ significa que $x^2-3x=10$, donde $x=5$ ou $x=-2$; $z=-28$ significa que $x^2-3x=-28$, esta é uma equação do 2º grau com discriminante -103, portanto não tem raízes reais; assim não há mais soluções além das já encontradas.

Ora, para $x=5$, tem-se $y=2$ e, para $x=-2$, tem-se $y=-5$. O sistema tem apenas duas soluções, (x,y) a saber, $(5,2)$ e $(-2,-5)$.

Outro processo de resolução

Da 1ª equação do sistema (4), resulta

$$(x-y)^4=3^4,$$

isto é, $x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4=81$.

Atendendo a que $x^4+y^4=641$, tem-se

$$2x^3y-3x^2y^2+2xy^3=280,$$

isto é, $xy(2x^2-3xy+2y^2)=280$,

o que equivale a

$$xy\left[2(x-y)^2+xy\right]=280.$$

Como $x-y=3$, resulta

$$xy(18+xy)=280,$$ ou seja, $(xy)^2+18(xy)=280$;

pondo $xy=t$ e resolvendo a equação

$$t^2+18t-280=0,$$

obtém-se $t_1=10$ e $t_2=-28$, etc.

O leitor pode completar facilmente a resolução.