CANTO DÉLFICO

Amílcar Branquinho
Universidade de Coimbra
ajplb@mat.uc.pt

À PROCURA DA HARMONIA

Caro Leitor,
A nossa natureza tende a aceitar como adquirido tudo aquilo que está ao alcance de um clique. Os títulos das notícias sobrepõem-se ao conteúdo e passam a ser eles mesmo a notícia. A matemática não escapa à voragem dos dias em que vivemos, para tal basta ler manuais e programas de Matemática dos vários níveis de ensino em Portugal.

O que fazer quando um tema em estudo, neste caso de matemática, é demasiado difícil? Deixá-lo a outra pessoa não parece ser a forma mais adequada! Podemos tentar adivinhar a sua solução por meio de observações, e a demonstração virá de seguida. Isto foi o que disse Stieltjes a Hermite a propósito do seu estudo sobre fracções contínuas.

Deixamos duas questões que devem guiar o professor no trabalho diário com os seus alunos. Conseguirá um aluno encontrar propriedades de forma prática? Conseguirá ele construir modelos que demonstrem essas propriedades?

Numa altura em que o *Projecto Delfos* cumpre 10 anos queremos falar um pouco sobre a *Resolução de Problemas*, pois é um assunto de grande importância para o avanço da matemática e também da sua compreensão e aprendizagem.

O saber fazer matemática está intimamente relacionado com a habilidade em resolver problemas, encontrar demonstrações, criticar argumentos, usar a linguagem matemática com desenvoltura, reconhecer conceitos matemáticos em situações concretas, saber dosear a ansiedade para apreciar gostosamente o caminho percorrido. O dar-se conta de que a obtenção da solução não é o mais importante, mas sim o caminho que o leva a ela.

A habilidade em resolver problemas é fundamental na formação do estudante e deve ser potenciada.

A resolução de problemas é assim uma actividade primordial na disciplina de Matemática, e ainda que não seja o seu único objectivo, é seguramente um elemento pedagógico a ter em conta.

Um problema matemático é uma situação que tem como objectivo uma meta e que pressupõe obstáculos e muita determinação para os superar.

Assim, aprender a resolver problemas e aceitar que há várias respostas a uma mesma pergunta, bem como formas de o atacar, constitui uma parte fundamental tanto da educação como do processo de aprendizagem da matemática.

As vantagens deste processo na aprendizagem e no ensino da matemática são notórias sob diversos pontos de vista, que não vamos enumerar, para além da autonomia de processos que transcendem a própria matemática.

Neste canto vamos falar do conceito de número real, sua representação em fracção contínua e terminaremos com um exemplo de matemática da nossa vida quotidiana.

Fracções contínuas. Seja x um número real. Definimos a sua *parte inteira*, $\lfloor x \rfloor$, como o maior inteiro menor do que ou igual a x, e $\{x\}$ como a sua *parte fraccionária* $x - \lfloor x \rfloor$. Temos então $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, onde $0 \leq \{x\} < 1$, $x \in \mathbb{R}$, e $\{x\} = 0$ se, e somente se, x é um inteiro. Tomemos $x_0 = x$, $a_0 = \lfloor x \rfloor$, e $x_1 = 1/\{x\}$; se x não é um inteiro, então $x = a_0 + 1/x_1$, com $x_1 > 1$. Repetindo o processo com x_1, então $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$ e $x_2 = 1/\{x_1\}$, sempre que x_1 não é um inteiro, obtendo-se $x = a_0 + 1/(a_1 + 1/x_2)$, com $x_2 > 1$. De uma forma geral, tomando $a_n = \lfloor x_n \rfloor$ e $x_{n+1} = 1/\{x_n\}$, verificando sempre que x_n não é um inteiro, obtemos a *fracção contínua finita* para x

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x_{n+1}}}}}, \text{ com } x_{n+1} > 1.$$

Os números $a_1, \ldots, a_n$ são todos inteiros positivos e são denominados *denominadores parciais*, e a_0 é um inteiro. Observe-se que os numeradores parciais são todos iguais a 1. Como a notação apresentada para fracção contínua finita de x ocupa demasiado espaço, vamos usar a notação mais compacta $x = [a_0; a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}]$. O processo descrito termina se x_{n+1} for um inteiro e neste caso $[a_0; a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}]$ será designada por expansão em *fracção contínua simples* de x. Fica claro que uma fracção contínua simples é um número racional. Reciprocamente, todo o número racional x admite uma representação em fracção contínua simples, aplicando o algoritmo que acabámos de descrever. De facto, escrevendo $x = a_0 + p/q$, com $p < q$, então aplicando o *algoritmo de Euclides* a $r_0 = q$ e $r_1 = p$ obtemos a sucessão, $(r_k), k = 0, 1, \ldots, N$ dada por $r_{n-1} = a_n r_n + r_{n+1}$, $0 < r_{n+1} < r_n$, onde a_n são os denominadores parciais da fracção contínua para x. A sucessão de números inteiros positivos (r_k) é decrescente, e portanto existe um inteiro N tal que $r_{N+1} = 0$, pelo que a fracção é simples.

O que acontece quando x_n não é um inteiro qualquer que seja n? Neste caso o número real, x, é representado por uma *fracção contínua infinita* $x = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$. Uma secção finita desta fracção $\pi_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ será designada por *aproximante* da fracção contínua. Cada aproximante, $\pi_n = p_n/q_n$, é um número racional, e os inteiros p_n e q_n são funções polinomiais com coeficientes constantes, nas variáveis $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Teorema 1. *Sejam* $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, *e as sucessões* (p_k) *e* (q_k) *definidas por e* $q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. *Então o aproximante de ordem* n, $\pi_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$, *é dado por* p_n/q_n.

Como aplicação deste teorema mostra que:

1) $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$ for $n \geq 0$.

2) $\pi_{n-1} - \pi_n = (-1)^n/(q_n q_{n-1})$ for $n \geq 1$.

3) $\pi_0 < \pi_2 < \pi_4 < \cdots$ e $\pi_1 > \pi_3 > \pi_5 > \cdots$.

Os próximos teoremas dizem-nos que os aproximantes da fracção contínua de x convergem para x.

Teorema 2. *Sendo* (p_n/q_n) *a sucessão dos aproximantes da fracção contínua para* x, *então*

$$1/(q_n + q_{n+1}) < |q_n x - p_n| \leq 1/q_{n+1},$$

e se x *é um número irracional, então a sucessão dos aproximantes,* (p_n/q_n), *de* x *convergem para* x. *Além disso,* $|x - p_n/q_n| < 1/(q_n^2)$, $n \geq 0$.

Teorema 3. *Todo o aproximante* p_n/q_n *com* $q_n > 1$ *e* $n \geq 2$ *é uma melhor aproximação de* x, *i.e. para todo o* a *e o* b *com* $1 \leq b \leq q_n$ *e* $a/b \neq p_n/q_n$ *então* $|bx - a| > |q_n x - p_n$. |

Exemplos.

Seja $x = \sqrt{2}$, então $a_0 = 1$ e $x_1 = 1/(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} + 1$, logo $\sqrt{2} = 1 + 1/(1 + \sqrt{2})$. Desta forma obtemos a fracção contínua infinita, $\sqrt{2} = [1; 2, \ldots, 2, \ldots]$. Os denominadores parciais, com a excepção de a_0 são iguais a 2, pelo que a *fracção contínua* se diz *periódica*.

Verifica que a fracção contínua para o número de ouro, $(\sqrt{5} + 1)/2$, é dada por $[1; 1, \ldots, 1, \ldots]$.

Deixamos-te um **exercício:** Sabendo que uma fracção contínua com período N é tal que $a_k = a_{k+N}$, para $k \geq 0$, mostra que ela representa

$$x = \frac{p_{N-1} - q_{N-2} + \sqrt{(p_{N-1} - q_{N-2})^2 + 4 p_{N-2} q_{N-1}}}{2 q_{N-1}}$$

onde p_k e q_k satisfazem as relações de recorrência do teorema 1.

À procura da melhor folha. Esta é uma experiência descrita pelo saudoso professor Miguel de Guzmán no texto "Experimentos de Geometria" que pode ser consultado no Material de Apoio do Projecto Delfos em *http://www.mat.uc.pt/~delfos/*.

Como resposta à pergunta "De que forma podemos cortar uma folha de papel?", temos a seguinte actividade que mostra como os dois números que introduzimos atrás estão intimamente ligados à ideia de harmonia, muito de acordo com o pensamento da Escola Pitagórica.

Obviamente que isto depende do que quisermos fazer com ela. De qualquer forma, podemos pensar em cortá-la em rectângulos cujos lados mantenham a mesma proporção do inicial. Desta maneira conservariam a forma inicial. Assim, se quiséssemos continuar com o processo, obteríamos quatro rectângulos com a mesma forma, etc. Resumindo, ao partir em dois não saímos do mesmo aspecto de rectângulo.

A pergunta que temos obrigatoriamente de formular é: Existe algum rectângulo com esta propriedade?

As folhas que usualmente temos à nossa frente têm dimensões 21 cm × 29,7 cm. A proporção entre o lado maior e o menor é 29,7/21 = 1,41. Se dividirmos a folha ao meio pelo lado maior obtemos duas folhas de dimensões 14,85 cm × 21 cm, cuja proporção é 21/13,85 = 1,41 , o que é curioso!

Enviaram-nos há algum tempo um ofício numa folha diferente da anterior com dimensões 21,5 cm × 31,5 cm. Ao verificarmos se se tem a mesma propriedade, começámos por analisar as proporções entre os seus lados, i.e. 31,5/21,5 = 1,46. Agora se dividirmos a folha ao meio pelo lado maior obtemos duas folhas de dimensões 15,75 cm × 21,5 cm, cuja proporção é 21,5/15,75 = 1,36. Desta forma vemos que não tem a mesma propriedade da anterior. Se repetirmos este processo uma vez mais, obtemos quatro folhas de dimensões 10,75 cm × 15,75 cm, cuja proporção entre o lado maior e o menor é 1,46.

Conseguirás explicar este facto?

A folha em que normalmente escrevemos está feita desta forma com toda a intenção. Estas dimensões especiais designam-se por *A*4. As dimensões da folha do ofício que nos enviaram não cumprem esta proporção. Observa que a proporção encontrada na de tamanho *A4* é 1,41. Isto diz-te alguma coisa? O número é aproximadamente igual a 1,4142135 . . . .

De facto, considera um rectângulo de dimensões $a \times b$ tal que cortando-o em duas partes (cf. linha de pontos da figura 1) resultam dois rectângulos com lados na mesma proporção, i.e. a razão entre o lado maior e o menor deve ser a mesma nos rectângulos.

Assim, teremos $b/a = a/(b/2)$, pelo que $b^2 = 2a^2$, portanto, $b/a = \sqrt{2}$.

Fica assim desfeito o mistério.

Supõe agora, uma folha rectangular com outra propriedade. Ao retirar-lhe um quadrado, como se mostra na figura 1 da direita, ficamos com um rectângulo com a mesma proporção do rectângulo inicial. Qual deve ser a proporção d/c neste caso? Analisa a figura. Parece fácil?

Temos então, $d/c = c/(d-c)$. Assim, $d^2 - cd - c^2 = 0$ e portanto $d/c = (\sqrt{5}+1)/2 = 1.61803\ldots$.

Quando os comprimentos se comportam como c e d, i.e. o maior comprimento, d, está para o menor, c, assim como este está para a diferença $d-c$, dizemos que c é a secção áurea de d. Os gregos pensavam, não sem justificação, que o rectângulo com estas proporções é particularmente agradável à vista, e desde os artistas gregos que se utiliza esta proporção, na arquitectura, na escultura, até no ecrã dos nossos computadores. O rectângulo assim construído designa-se por *rectângulo áureo* e o triângulo isósceles tal que os seus lados maiores são iguais e o desigual, mais pequeno, é a secção áurea deles, designa-se por *triângulo áureo*.

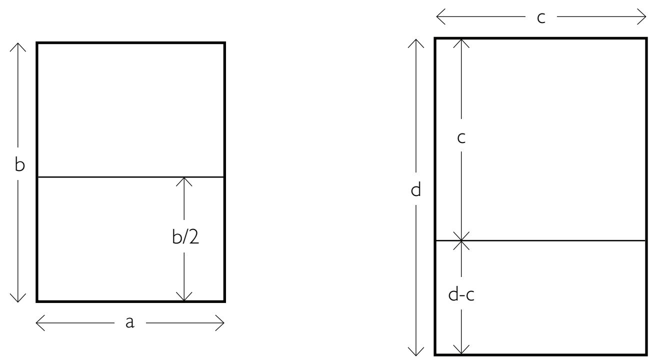

Figura 1: Papel A4 e folha

Deixamos-te um desafio: Analisa num triângulo áureo a medida dos seus ângulos. O que acontece quando o cortas ao longo da bissectriz de um dos ângulos iguais?