As mudanças da intensidade do campo magnético da Terra (excursões geomagnéticas) geram frequentemente auroras polares. Trata-se de um fenómeno óptico, que decorre do impacto de ventos solares e poeiras espaciais, reencaminhadas pelo campo magnético da Terra. Normalmente, são visíveis em altas latitudes.

Intermitência Heteroclínica do Campo Magnético da Terra

Alexandre Rodrigues
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
alexandre.rodrigues@fc.up.pt

Existem evidências geológicas de que o pólo magnético da Terra muda de orientação de tempos a tempos, assumindo um comportamento aparentemente caótico. Modelar a variação do campo geomagnético está longe de ser um assunto completamente compreendido. Alguns físicos acreditam que redes heteroclínicas estruturalmente estáveis são o conceito matemático responsável pela dinâmica do campo magnético da Terra. Este artigo aborda, de uma forma acessível, um modelo matemático que explica as mudanças de polaridade do campo geomagnético e é destinado a qualquer leitor curioso, que não possua, necessariamente conhecimentos muito especializados de matemática. A exposição dá a conhecer um dos assuntos que mais tem despertado a atenção no âmbito do geomagnetismo e, no final, é complementada com simulações numéricas.

1. INTRODUÇÃO

A Terra comporta-se como um íman de proporções gigantescas, em redor da qual existem curvas de força fechadas com a mesma intensidade do campo magnético. A magnitude do campo geomagnético foi medida pela primeira vez por K. F. Gauss em 1835 e tem sido analisada repetidamente desde então, observando-se um decaimento linear dessa intensidade a uma taxa de 5% por século [12]. De uma forma geral, a história do campo magnético da Terra pode ser descrita grosseiramente como um *dipolo axial*, onde o pólo Norte geográfico se localiza bastante próximo do pólo Norte magnético como esquematizado na figura 1 (a) – é esta proximidade que promove o *bom* funcionamento da bússola: o magneto setentrional da agulha magnética da bússola determina o norte da Terra por ser atraído pelo pólo sul magnético do planeta.

Em cada ponto da superfície do planeta Terra, a amplitude do ângulo entre o vector que aponta para o norte magnético (determinado pela bússola) e o vector que aponta para o norte geográfico é habitualmente designada por *declinação magnética*. Esta amplitude depende da região da superfície da Terra; por exemplo, em Portugal, a declinação magnética é de cerca de 7 graus, no Canadá é de cerca de 40 graus e na Finlândia a declinação magnética é praticamente nula. Esta declinação magnética vai variando ao longo do tempo. Na navegação, é usual construir-se cartas com as linhas *isogónicas* (ou *isopóricas*) contendo curvas de nível com a mesma declinação magnética e que são actualizadas periodicamente[1] – figura 1 (c).

[1] Para o leitor mais curioso, sugere-se a consulta do site *http://geomag.usgs.gov/movies/movies/index.php* onde se pode ver a evolução da declinação magnética na superfície da Terra nos últimos 400 anos.

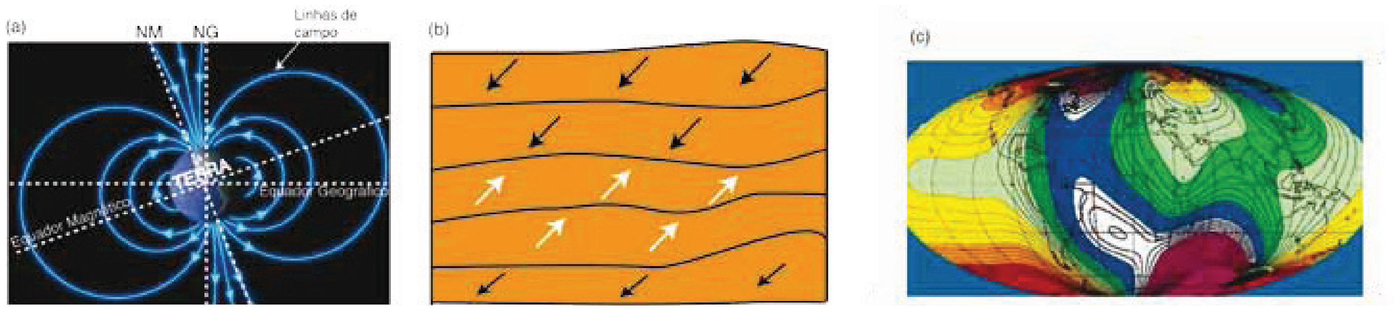

Figura 1: (a) Esquema do campo magnético da Terra aproximado a um modo axial dipolar; NG – Norte Geográfico; NM – Norte Magnético. O eixo de rotação da Terra passa pelo Pólo Norte Geográfico. (b) Esquema de uma rocha de origem vulcânica com várias camadas de lava que, após o arrefecimento, gravou a polaridade do campo magnético da Terra ao longo dos tempos. Alguns autores apelidam estas rochas de fósseis magnéticos. (c) Carta isogónica da Terra (2000): as linhas da carta representam curvas com a mesma declinação magnética. As cores mais densas representam declinações magnéticas mais acentuadas.

O porquê destas variações da intensidade do campo magnético da Terra é um problema que ainda não está completamente resolvido, mas pensa-se que a razão se prende com a existência de movimentos cíclicos dos fluidos com componentes magnéticas no interior da Terra.

Da análise de algumas rochas basálticas – ver figura 1 (b), há várias evidências que apontam ter havido mudanças na polaridade do campo magnético da Terra ao longo dos tempos, sugerindo mesmo que o pólo norte geomagnético tem mudado de orientação de tempos a tempos, de uma forma bastante irregular, com intervalos médios de permanência numa dada polaridade de 250.000 anos[2]. Designaremos estas mudanças de polaridade do campo magnético por reversões do campo geomagnético, cujos efeitos na vida no planeta ainda não foram devidamente estudados.

Para o decorrer da exposição convém relembrar, de um modo breve, as noções de grupo de Lie e de Equivariância, os quais constituem um pre-requisito essencial para a compreensão dos capítulos que se seguem. Uma boa abordagem sobre estes conceitos pode ser encontrada no livro [5].

Grupos de Lie e Equivariância. Um grupo de Lie é um subgrupo fechado de $GL(\mathbf{R}^n)$, o conjunto dos endomorfismos invertíveis de $\mathbf{R}^n$. Se Γ é um grupo de Lie, um campo de vectores f, definido em $\mathbf{R}^n$, diz-se *equivariante* ou *simétrico* por Γ se

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad f(\gamma x) = \gamma f(x).$$

Em geral, vai denominar-se o grupo de Lie pelo nome do grupo abstracto, ao qual é isomorfo. Teoricamente, poderá causar alguma confusão mas, na prática, é bastante útil e intuitivo. Por exemplo, o conjunto $\{I_n, -I_n\}$, munido da multiplicação usual de matrizes, é um subgrupo fechado de $GL(\mathbf{R}^n)$. Logo, $\{I_n, -I_n\}$ é um grupo de Lie e será frequentemente chamado de $\mathbf{Z}_2 = \{-1, 1\}$, uma vez que são isomorfos, como grupos abstractos. Um outro exemplo é o grupo das rotações do plano e que será denotado por $\mathbf{SO}(2)$.

2. MODELO MATEMÁTICO PARA AS REVERSÕES

O mecanismo responsável pelas reversões do campo magnético da Terra ainda não é bem compreendido, sendo um dos assuntos mais estudados neste momento por várias equipas de investigação espalhadas pelo mundo[3].

Vários modelos matemáticos tentam descrever o fenómeno, sendo o mais plausível o modelo do *geodínamo*, construído no contexto das equações da magnetohidrodinâmica. Neste modelo, explica-se como é que a Terra gera e mantém o campo magnético sob a acção de um campo de velocidades (gerado pelo movimento dos líquidos férricos no interior do planeta). Encontrar explicitamente as soluções gerais para este modelo é um problema em aberto.

M. Krupa [10], em 1996, propôs um modelo no qual as reversões do campo magnético da Terra são explicadas recorrendo aos conceitos de *ciclos* e *redes heteroclínicos* associados a modos de simetria dipolares e quadripolares.

Com base nesta ideia e em anteriores trabalhos de Proctor [11], Melbourne, Proctor e Rucklidge [12] propuseram, em 2001, um modelo no qual acoplam dinamicamente diferentes *modos de simetria*. Entenda-se por *modo de simetria* um campo de vectores tangente à esfera bidimensional $\mathbf{S}^2 \subseteq \mathbf{R}^3$, a qual pretende representar a esfera terrestre, e que é simétrico/anti-simétrico relativamente ao eixo polar e ao plano equatorial.

Na terminologia de Holme [9], os modos de simetria são classificados em quatro grupos:

- axiais dipolares – D_a, onde as soluções são anti-simétricas relativamente ao plano equatorial e equivariantes por rotações de π em torno do eixo polar;
- axiais quadripolares – Q_a, onde as soluções são simétricas relativamente ao plano equatorial e equivariantes por rotações de π em torno do eixo polar;
- equatoriais dipolares – D_e, onde as soluções são simétricas relativamente ao plano equatorial e anti-simétricas por rotações de π em torno do eixo polar;
- equatoriais quadripolares – Q_e, onde as soluções são anti-simétricas relativamente ao plano equatorial e anti-simétricas por rotações de π em torno do eixo polar – este modo de simetria nunca foi encontrado nos campos magnéticos de nenhum planeta (Gubbins [6]).

Fundamentalmente, o modelo descrito em [12] assenta no facto de o campo magnético da Terra, denotado por $B(r,t)$ por depender da posição espacial $r \in \mathbf{R}^3$ e temporal $t \in \mathbf{R}$, poder ser escrito da forma:

$$B(r,t) = y_1(t)D_e^1(r) + y_2(t)D_e^2(r) + x_2(t)Q_a(r) + x_3(t)D_a(r), \tag{1}$$

onde $r = (||(y_1, y_2)||, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Os modos $D_e = (D_e^1, D_e^2)$, Q_a e D_a são modos de simetria: modo equatorial dipolar, axial quadripolar e axial dipolar, respectivamente (ver figura 2). Basicamente, a equação (1) diz que o campo magnético pode

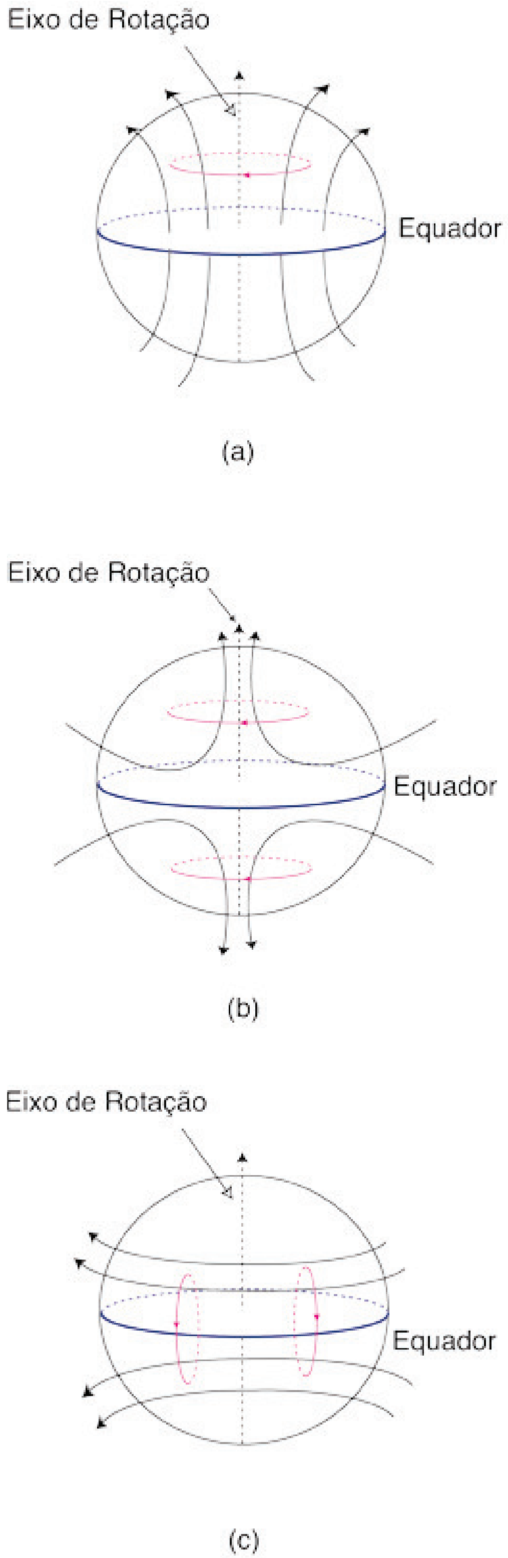

Figura 2: (a) Modo axial dipolar D_a; (b) Modo axial quadripolar Q_a; (c) Modo equatorial dipolar D_e.

ser escrito como combinação independente dos diferentes modos de simetria, facto demonstrado por Gubbins [6].

Os autores de [12] concentraram a sua análise na dinâmica das funções $y_1(t)$, $y_2(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$, vulgarmente designadas por funções de *amplitude*, as quais só dependem da variável tempo.

Com base em evidências experimentais observáveis, os autores de [12] assumiram que o campo de vectores (em $\mathbf{R}^4$), definido pelas funções de amplitude, é equivariante pela acção dos elementos do grupo de Lie $\Gamma \cong \mathbf{SO}(2) \oplus \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$. Assuma-se a representação usual de $\mathbf{SO}(2)$ nas duas primeiras coordenadas de $\mathbf{R}^4$ e a de $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ gerada pelas aplicações lineares:

$$\zeta_1(y_1, y_2, x_2, x_3) = (y_1, y_2, -x_2, x_3)$$

e

$$\zeta_2(y_1, y_2, x_2, x_3) = (y_1, y_2, x_2, -x_3).$$

Na teoria de campos de vectores simétricos, mostra-se que um campo de vectores que tenha grupo de simetrias Γ e que seja um polinómio de grau 3 tem a forma:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1(\mu_1 - (y_1^2 + y_2^2) + A_{12}x_2^2 + A_{13}x_3^2) - \omega y_2 \\ \dot{y}_2 = y_2(\mu_1 - (y_1^2 + y_2^2) + A_{12}x_2^2 + A_{13}x_3^2) + \omega y_1 \\ \dot{x}_2 = x_2(\mu_2 + A_{21}(y_1^2 + y_2^2) - x_2^2 + A_{23}x_3^2) \\ \dot{x}_3 = x_3(\mu_3 + A_{31}(y_1^2 + y_2^2) + A_{32}x_2^2 - x_3^2) \end{cases} \tag{2}$$

onde A_{ij}, μ_i e ω são constantes reais. Para um campo que não seja polinomial há termos de grau mais alto que não irão ser relevantes para a dinâmica. A admissão do grupo de simetrias na equação (2) favorece a ocorrência de ciclos e redes heteroclínicos no fluxo associado (Field [4]) .

3. CICLOS E REDES HETEROCLÍNICOS

Para que a exposição fique completa, explicita-se nesta secção o conceito de rede heteroclínica em $\mathbf{R}^n$. Uma descrição primorosa sobre redes heteroclínicas pode ser encontrada em Field [4].

Admita-se que ξ é um conjunto invariante pelo fluxo $\Phi_t(x)$ da equação diferencial $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$. Associado ao con-

[2] Várias evidências sugerem que a última reversão ocorreu há mais de 700.000 anos.

[3] Diversas correntes de opinião defenderam a queda de um meteorito como o responsável pelas reversões do campo magnético da Terra.

junto ξ, define-se o conjunto $W^s(\xi)$ como sendo o conjunto dos pontos de $\mathbf{R}^n$ onde começam as soluções cujas trajectórias se aproximam de ξ quando $t \to +\infty$, o qual possui a estrutura de variedade e será designado por *variedade estável* associada a ξ. Analogamente se define a *variedade instável* de ξ, denotada por $W^u(\xi)$, como sendo o conjunto dos pontos de $\mathbf{R}^n$ onde começam as soluções cujas trajectórias se aproximam de ξ quando $t \to -\infty$.

Mais formalmente, denotando por d a métrica euclidiana em $\mathbf{R}^n$, as variedades estável e instável associadas a ξ são definidas por:

$$W^s(\xi) = \{x \in \mathbf{R}^n : \lim_{t \to +\infty} d(\Phi_t(x), \xi) = 0\}$$

e

$$W^u(\xi) = \{x \in \mathbf{R}^n : \lim_{t \to -\infty} d(\Phi_t(x), \xi) = 0\}.$$

Os casos mais interessantes dizem respeito a conjuntos invariantes ξ tais que $W^s(\xi) \neq \{\xi\}$ e $W^u(\xi) \neq \{\xi\}$, os quais irão ser designados por *selas invariantes*. O caso mais simples de sela invariante é o de um ponto de equilíbrio como ilustrado na figura 3(a).

Dadas duas selas invariantes ξ_n e ξ_m, se $W^u(\xi_n) \cap W^s(\xi_m) \neq \emptyset$, dizemos que existe uma ligação heteroclínica de ξ_n para ξ_m. No caso de $\dim[W^u(\xi_n) \cap W^s(\xi_m)] > 1$, essa ligação heteroclínica corresponde a uma união de curvas solução do sistema inicial que se aproximam de ξ_n no passado e de ξ_m no futuro. Na figura 3(b) é dado um exemplo de uma ligação heteroclínica bidimensional.

Um *ciclo heteroclínico* é dado pela união de um conjunto finito ordenado de selas invariantes $\mathcal{A} = \{\xi_i, i = 1, \ldots, n\}$ para o qual existe um ciclo de ligações heteroclínicas entre elas, isto é, existe uma ligação heteroclínica de ξ_j para ξ_{j+1}, para todo $j = 1, \ldots, n-1$ e de ξ_n para ξ_1 [ver exemplo na figura 3(c)]. Uma *rede heteroclínica* é uma união conexa de ciclos heteroclínicos tal que, para qualquer par de selas na rede, existe uma sequência de soluções da equação a uni-las.

Numa esfera de dimensão 3, um ponto de equilíbrio p_0 (do tipo sela) para o qual $df(p_0)$ tenha valores próprios complexos não reais diz-se uma *sela-foco* – figura 3(d). Em qualquer vizinhança de uma sela-foco ou de uma solução periódica não trivial, soluções próximas tendem a espiralar em torno dela, razão pela qual estas selas vão ser designadas, daqui por diante, por *selas de rotação* – mais detalhes poderão ser encontrados em [2] e em [16].

4. QUEBRA DE SIMETRIA

O fluxo associado à equação (2) possui uma esfera tridimensional de raio positivo R, denotada por $\mathbf{S}^3$, e que verifica as seguintes condições:

- é invariante pelo fluxo (trajectórias que comecem em $\mathbf{S}^3$ permanecem em $\mathbf{S}^3$);
- atrai todas as trajectórias não estacionárias.

Para um conjunto *grande*[4] de valores das constantes da equação (2) existe, dentro de $\mathbf{S}^3$, uma rede heteroclínica assimptoticamente estável[5] associada a quatro selas-foco da forma $(0, 0, \pm R, \pm R)$ e uma solução periódica. As ligações heteroclínicas que envolvem a solução periódica têm dimensão 2 e as outras têm dimensão 1.

As ligações heteroclínicas que envolvem a solução periódica separam $\mathbf{S}^3$ em quatro ciclos heteroclínicos distintos, constituindo barreiras impenetráveis à passagem de trajectórias, razão pela qual cada solução apenas se aproxima de um e um só ciclo. Como se poderá ver mais adiante, com este modelo não se consegue explicar as reversões do campo magnético. Na verdade, admitir $\Gamma \cong \mathbf{SO}(2) \oplus \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ como o

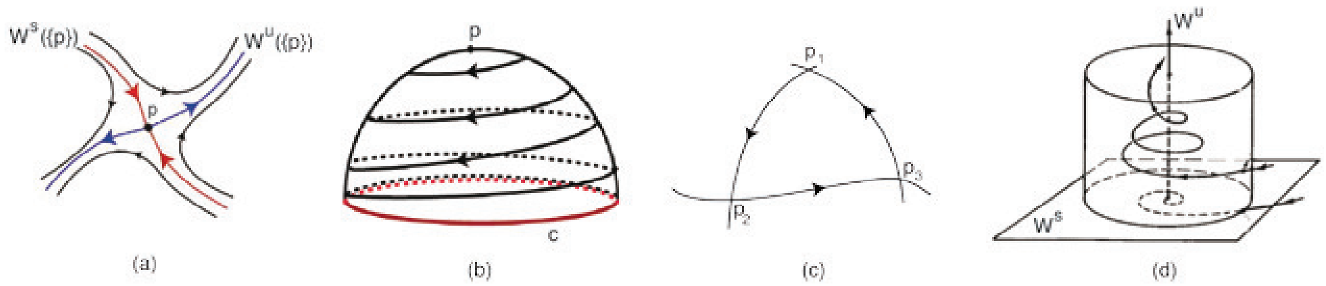

Figura 3: (a) Ponto de equilíbrio tipo sela; (b) Ligação heteroclínica do ponto de equilíbrio *P* para a solução periódica *c*; (c) Ciclo heteroclínico associado a três pontos de equilíbrio (as selas estão ligadas de forma cíclica); (d) Sela-foco como uma sela de rotação.

grupo de simetrias do modelo é uma abordagem irrealista do problema, porém absolutamente necessária para a análise da geometria do fluxo da equação diferencial.

A solução encontrada em [12] foi a de quebrar *todas* as simetrias da equação diferencial (2), adicionando-lhe termos extra (com norma arbitrariamente pequena), os quais podem ser explicados por heterogeneidades da convecção dos movimentos no interior da Terra[6].

Para o fluxo assimétrico, garante-se a permanência de uma cópia deformada de $\mathbf{S}^3$, na qual existe uma rede heteroclínica associada às mesmas selas do sistema não perturbado. Todas as ligações heteroclínicas de (2) com dimensão 1 mantêm-se mas as que no fluxo original tinham dimensão 2, genericamente passam a ser *transversais*. A transversalidade, conjugada com o facto das selas da rede serem de rotação, garante a existência de *comutação heteroclínica* perto da rede. Este fenómeno, estudado por Aguiar *et al* [2], é caracterizado pela existência de trajectórias que visitam as vizinhanças das selas, seguindo de perto qualquer sequência infinita de ligações heteroclínicas da rede por qualquer ordem pré-determinada – a prova pode ser consultada em Rodrigues [13, 14].

5. EXPLICAÇÃO ANALÍTICA DAS REVERSÕES

A existência de *comutação heteroclínica* perto da rede implica a existência de uma infinidade de soluções da equação perto de qualquer sequência de ligações heteroclínicas. Na figura 4, está representada a evolução das componentes y_1, y_2, x_2 e x_3 de uma trajectória com condição inicial perto da rede. Como se pode observar, a componente x_3 de qualquer solução poderá mudar o sinal várias vezes (podendo ser uma infinidade num tempo infinito). Tendo em conta que x_3 é o coeficiente do modo axial dipolar na equação (1), conclui-se daqui a existência de soluções do modelo que conduzem a mudanças da polaridade do campo magnético.

Com os parâmetros que os autores de [13] e [14] consideraram, da análise das séries temporais da figura 4 explica-se geometricamente o porquê de o campo geomagnético ser essencialmente axial dipolar; note-se que para quase todas as trajectórias, o tempo que estas passam perto do equilíbrio $(0,0,\pm R,0)$ é significativamente menor do que o que passa perto de $(0,0,0,\pm R)$. Observando a equação (1), isto implica que genericamente o campo B é dominado pela parcela correspondente ao modo axial dipolar.

A duração das reversões é, em geral, bastante curta comparada com o tempo durante o qual o campo magnético mantém

[4] Em termos de medida.

[5] Soluções próximas da rede são atraídas para ela.

[6] O termo adicionado quebra todas as simetrias, mas mantém invariante o plano onde se encontram as ligações unidimensionais.

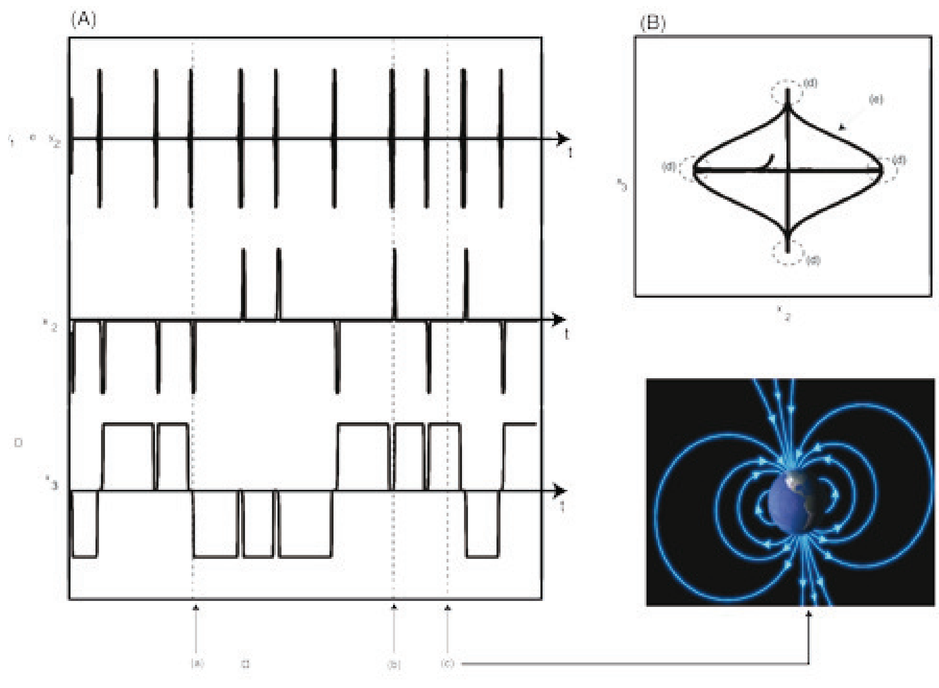

Figura 4: (A) séries temporais da solução do sistema perturbado com condição inicial (−0.5000, 0.0116, −0.1623, −0.2781) onde $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.2$, $\mu_3 = 0.3$, $A_{12} = A_{21} = -0.33333$, $A_{13} = A_{31} = -0.5$, $A_{23} = A_{32} = -0.16667$, $\omega = 1$, $\varepsilon_1 = 0.12$, $\varepsilon_2 = 0.1$ e $\varepsilon_3 = 0.001$; (B) projecção no plano (x2, x3) da trajectória cujas séries temporiais foram estudadas em (A);
Legenda: (a) Reversão; (b) Excursão; (c) Modo Axial dipolar; (d) Pontos de equilíbrio; (e) Ligação heteroclínica de dimensão 1 entre os equilíbrios.

uma dada polaridade. Interessante de realçar é ainda o modo como este modelo sugere a mudança da geometria do campo geomagnético durante a reversão. Entre duas reversões, este modelo sugere que o campo magnético passa, de forma rápida, por uma simetria equatorial dipolar e, posteriormente, por uma axial quadripolar. Apesar de não estar bem compreendido e de ainda gerar muita controvérsia, é possível afirmar que este modelo é consistente com o comportamento observável do campo geomagnético.

Da análise de redes heteroclínicas que envolvem selas de rotação e transversalidade de variedades invariantes levada a cabo em [1] e [2], decorre ainda a existência de uma *ferradura suspensa* perto da rede e, consequentemente, de comportamento caótico. É este dado que impossibilita qualquer tipo de previsões sobre a próxima reversão do campo magnético[7]. Na secção que se segue explicita-se, de um modo sucinto e sumário, o conceito de *ferradura suspensa*.

6. FERRADURA SUSPENSA

Nos inícios do século XX, H. Poincaré foi o precursor da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, dando origem a um novo campo de investigação na Matemática, o dos Sistemas Dinâmicos. Meio século mais tarde, S. Smale, interessando-se em estudar a Teoria de Poincaré, formaliza o primeiro sistema dinâmico com uma lei de evolução determinista mas que é caótico, isto é:

(1) tem sensibilidade relativamente às condições iniciais (condições iniciais vizinhas têm futuros distintos);

(2) os pontos periódicos são densos do domínio da função;

(3) existe uma trajectória que é densa no domínio da função.

Construção. Dado um quadrado como o da figura 5, estique-se até ficar um longo rectângulo fino, dobre-se em ferradura e coloque-se sobre o quadrado original. Itere-se este processo. No segundo passo, obtém-se uma espécie de ferradura dentro da ferradura, com quatro dobras. Cada iteração duplica as dobras existentes. No limite, obtém-se um tipo de curva infinitamente contorcida. Escolhendo dois pontos próximos no quadrado original, não se poderá afirmar rapidamente onde eles estarão no final do processo: estes ficarão afastados um do outro devido à dobra e ao esticamento a que foram sujeitos. Chama-se *Ferradura de Smale* a esta transformação topológica (difeomorfismo), a qual fornece uma base para a compreensão das propriedades caóticas dos sistemas dinâmicos.

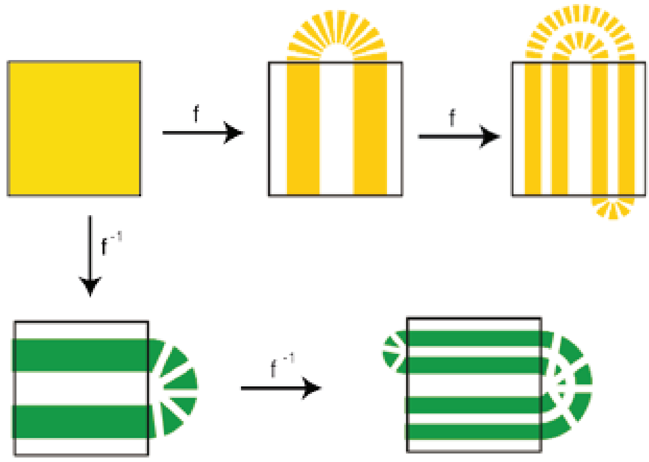

Figura 5: Construção da Ferradura de Smale.

Uma descrição elementar da transformação ferradura pode ser encontrada em Devaney [3] (secção 2.3).

Uma *Ferradura Suspensa* é o *esparguete enovelado* obtido ligando cada ponto à sua imagem por uma curva no espaço, a qual continua a ter as propriedades (1)–(3) acima. A existência de uma *Ferradura Suspensa* implica que cada secção que lhe seja normal contém um conjunto compacto e invariante pelo fluxo, o qual é caracterizado por ser totalmente desconexo (as componentes conexas reduzem-se a pontos) e por ser perfeito (todos os pontos são de acumulação).

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As reversões do campo geomagnético constituem um dos pontos mais desafiantes do geomagnetismo e da geofísica. Apesar de o fenómeno das reversões estar pouco entendido, a sua ocorrência está bem evidenciada por rochas basálticas. Neste artigo, apresentou-se um modelo que é relevante para o estudo das reversões e cuja prova analítica foi efectuada em Rodrigues [13, 14]. Neste modelo, as durações dos intervalos de tempo de polaridade constante e a curta duração das reversões são consistentes com as da Terra. O modelo consegue ainda explicar o porquê do campo geomagnético ser predominantemente axial dipolar. É interessante salientar que a existência do grupo de simetrias no campo de vectores definido em (2) é uma hipótese muito forte e irrealista. No entanto, uma vez que o estudo directo do sistema perturbado é intratável, a existência da simetria do campo não perturbado foi essencial para o tratamento analítico do problema. Estudar os efeitos da quebra de simetria é, actualmente, uma linha de investigação importante no ramo dos sistemas dinâmicos.

Este artigo é uma apresentação acessível dos trabalhos que Rodrigues [13, 14] desenvolveu no seu projecto de doutoramento sob a orientação de Isabel Labouriau e Manuela Aguiar, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.As simulações numéricas (séries temporais e projecções) foram obtidas usando o programa DSTOOL [7]. A investigação levada a cabo pelo autor, membro do Centro de Matemática da Universidade do Porto (CMUP), teve apoio financeiro da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), Portugal, através dos programas POCTI e POSI, com fundos nacionais e da União Europeia. A.A.P. Rodrigues foi apoiado directamente pela FCT através da bolsa de doutoramento com referência SFRH/BD/28936/2006.

REFERÊNCIAS

[1] M. Aguiar, S. Castro e I. Labouriau, "Dynamics near a heteroclinic network", *Nonlinearity*, No. 18, 391–414, 2005

[2] M. Aguiar, I. Labouriau e A. Rodrigues, "Switching near a heteroclinic network of rotating nodes", *Dynamical Systems: an International Journal*, Vol. 25, Issue 1, 75–95, 2010

[3] R. Devaney, "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems", 2nd ed., *ABP- Westview*, 2003

[4] M. Field, "Lectures on bifurcations, dynamics and symmetry", *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, Vol. 356, Longman, 1996

[5] M. I. Golubitsky, I. Stewart e D. G. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. II, Springer, 2000

[6] D. Gubbins, C. Barber, S. Gibbonsy e J. J. Love, "Kinematic dynamo action in a sphere II - Symmetry selection", *Proc. R. Soc. Lond. A,* No. 456, 1333–1353, 2000

[7] J. Guckenheimer, M. R. Myers, F. J. Wicklin, P. A. Wolfork, "Dstool: A Dynamical System Toolkit with an Interactive Graphical Interface" Reference Manual, Center for Applied Mathematics, Cornell University, 1995

[8] M. W. Hirsch, C. C. Pugh e M. Shub, *Invariant Manifolds, Lecture Notes in Mathematics*, 583, Springer-Verlag, 1977

[9] R. Holme, "Three-dimensional kinematic dynamos with equatorial symmetry: application to the magnetic fields of Uranus and Neptune", *Phys. Earth Planet. Interiors*, No. 102, 12, 105-122, 1997

[10] M. Krupa, "Robust heteroclinic cycles", *J. Nonlin. Sci*. 7, 129–176, 1996

[11] M. Proctor, "The role of mean circulation in parity selection by planetary magnetic fields", *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 8, 311–324, 1977

[12] R. L. McPherron, "Solar Terrestrial Influences on Climate during Geomagnetic Reversals", Seminário de Aspen, Institute Geophysics and Planetary Physics University of California, 2010

[13] I. Melbourne, M. R. E. Proctor e A. M. Rucklidge, "A heteroclinic model of geodynamo reversals and excursions", *Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge* (eds. P. Chossat, D. Armbruster and I. Oprea, Kluwer: Dordrecht, 363–370, 2001

[14] A. Rodrigues, "Persistent Switching near the Heteroclinic Model for the Geodynamo Problem", submetido, 2011

[15] A. Rodrigues, "Heteroclinic Phenomena", Ph.D. Thesis, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, 2011

[16] A. Rodrigues, I. Labouriau e M. Aguiar, "Chaotic Double Cycling", *Dynamical Systems: an International Journal*, Vol. 26, Issue 2, 199–233, 2011

[7] Em [11], há a referência de que o decaimento linear que se está a observar pode ser interpretado como o início de uma reversão; segundo métodos estatísticos, designadamente regressão linear, a mesma referência aponta que a reversão ocorrerá no ano 4000.

SOBRE O AUTOR

Alexandre Rodrigues é licenciado em Matemática - Ramo Educacional (2003) e Mestre em Matemática - Fundamentos e Aplicações (2006) pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, com especialização em sistemas dinâmicos. Obteve em 2012 o grau de Doutor (PhD) em Matemática pela Universidade do Porto com a tese "Heteroclinic Phenomena". Faz investigação em Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Actualmente é docente destacado na Escola Secundária de Arouca, continuando ligado ao Centro de Matemática da Universidade do Porto.