ANTÓNIO MACHIAVELO
Universidade do Porto
ajmachia@fc.up.pt

PROBLEMAS POTENCIALMENTE PERIGOSOS

Há, em matemática, alguns problemas notáveis que são muito fáceis de enunciar, mas cuja solução tem escapado a todos os esforços para os resolver. São, por isso, problemas com um fascínio especial. É necessário, porém, ter muito cuidado com eles, pois podem causar dependência, viciação e mesmo, em alguns casos mais extremos, obsessão crónica...

Na sua grande maioria, os problemas com que lidam os matemáticos, na sua tarefa quotidiana de investigar as regularidades mais abstractas do cosmos, são demasiado técnicos para descrever a um não-iniciado neste ofício por muitos considerado exótico. Há, porém, alguns problemas especiais que são fáceis de enunciar, mas cuja solução tem iludido os esforços de alguns dos mestres mais destacados desta arte multimilenar.

Há que confessar que estes não são, em geral, os problemas típicos ou representativos da prática diária de um matemático. São, em geral, questões marginais, mas que, talvez por isso mesmo, e também pelo enorme desafio que colocam, não deixam de ter o seu encanto e de ser fonte de um fascínio quase irresistível. E há também que confessar que os esforços despendidos no ataque a alguns destes enigmas motivaram já a descoberta de muitos outros resultados interessantes e conduziram ao desenvolvimento de ferramentas matemáticas importantes.

Vamos dar aqui alguns exemplos destes problemas inebriantes, que são de facto conjecturas, não sem antes deixar bem claro os riscos em que incorre o leitor ao continuar a ler este artigo. As conjecturas abaixo descritas são mais tentadoras do que as sereias da *Odisseia* de Homero, mais hipnóticas do que o olhar da serpente Apófis do Antigo Egipto. Há exemplos documentados em que causaram dependência, viciação e mesmo obsessão crónica.

Estão os leitores avisados! Daqui em diante, quem prosseguir fá-lo-á por sua própria conta e risco...

A CONJECTURA DE COLLATZ

Um dos mais curiosos dos problemas em aberto é o problema do $3x+1$, também conhecido como a *Conjectura de Collatz*. Para o descrever, seja $\mathcal{C}(n)$, onde n é um número natural, igual ao número $\frac{n}{2}$, se n for par, e igual a $3n+1$, se n for ímpar. O que é que acontece se se iterar a função $\mathcal{C}$? Ou seja, dado um número, o que é que acontece se aplicarmos $\mathcal{C}$ a esse número e depois, sucessivamente, aos números que se vão obtendo? Por exemplo, começando com o número 9, obtém-se:

$$9 \to 28 \to 14 \to 7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \\ \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to \cdots$$

Ou seja, $\mathcal{C}(9) = 28, \mathcal{C}(28) = 14, \mathcal{C}(14) = 7$, etc.

A conjectura de Collatz é a afirmação de que, qualquer que seja o número de que se parta, eventualmente se chega sempre ao número 1! Continuando o exemplo dado, tem-se $40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$. Ninguém conseguiu encontrar um exemplo onde tal não acontecesse, nem ninguém conseguiu ainda demonstrar a veracidade da conjectura.

Que a conjectura é válida para todos os números até 20×2^{58}, foi confirmado por Tomás Oliveira e Silva, do Departamento de Electrónica, Telecomunicações e Informática da Universidade de Aveiro. Para mais detalhes sobre este feito computacional nada trivial, ver: *http://www.ieeta.pt/~tos/3x+1.html.*

A melhor introdução à conjectura de Collatz e à sua história é o artigo de Jeffrey C. Lagarias disponível em: *http://www.ams.org/bookstore/pspdf/mbk-78-prev.pdf.*

Lagarias produziu também uma bibliografia anotada sobre este problema: *http://www.math.lsa.umich.edu/~lagarias/3x+1.html.*

A CONJECTURA DE GOLDBACH

A conjectura de Goldbach nasceu por volta de 1742 em cartas trocadas entre Christian Goldbach e Leonhard Euler, que podem ser lidas em *http://www.math.dartmouth.edu/~euler*. Esta conjectura afirma que todo o número par maior do que 2 pode ser escrito como soma de dois números primos.

Tomás Oliveira e Silva detém o recorde de verificação desta conjectura, tendo testado todos os números pares até 2678×10^{15}, e posteriormente conferido os resultados até 10^{17}, como pode ser lido em: *http://www.ieeta.pt/~tos/goldbach.html*

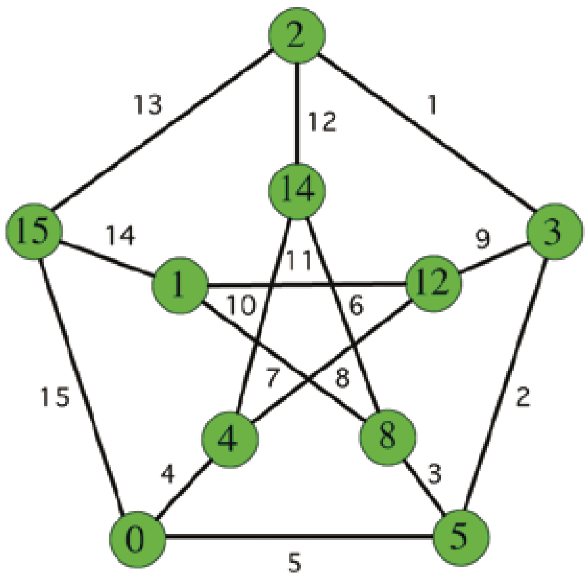
Apesar de alguns avanços notáveis em questões semelhantes, como, por exemplo, a demonstração de Vinogradov, em 1937, de que todo o número ímpar suficientemente grande é uma soma de três números primos, e apesar de se "saber" heuristicamente que o número de representações de um número par como soma de dois primos é assimptoticamente maior do que $\frac{n}{(\log n)^2}$ (de facto é conjecturado algo mais exacto, que todos os cálculos numéricos confirmam), ninguém sabe como resolver a conjectura de Goldbach.

INFINIDADE DE PRIMOS DA FORMA $n^2 + 1$

Há muitos outros problemas e conjecturas em aberto sobre números primos. Limitamo-nos aqui a dar apenas mais um exemplo. Dirichlet mostrou, em 1832, e usando análise complexa (!), que toda a progressão aritmética da forma $(an+b)_{n\in\mathbb{N}}$, com $\mathrm{mdc}(a,b)=1$, contém uma infinidade de primos. Desconhece-se qualquer resultado do género para polinómios de grau superior a um, em particular não se sabe se existe ou não uma infinidade de primos da forma n^2+1, conjecturando-se que existe: ver *http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0803/0803.1456v1.pdf.*

ETIQUETAGENS GRACIOSAS

Uma *etiquetagem graciosa* de um grafo com m arestas é uma atribuição de inteiros não negativos aos vértices, de tal modo que se as arestas forem etiquetadas com o módulo da diferença dos inteiros atribuídos aos vértices nela incidentes, então as arestas ficam etiquetadas com todos os números de 1 a m. Na figura abaixo dá-se um exemplo de uma tal etiquetagem para o denominado *grafo de Petersen*. O problema de saber se todas as árvores (grafos conexos sem ciclos) admitem ou não uma etiquetagem graciosa está em aberto. Conjectura-se que sim. Sendo as árvores grafos particularmente simples, é um pouco surpreendente que esta questão esteja por resolver. Para mais informações sobre este problema, ver: *http://mathworld.wolfram.com/GracefulGraph.html* e *http://kintali.wordpress.com/2009/06/23/graceful-tree-conjecture.*



Uma etiquetagem graciosa do grafo de Petersen

A CONJECTURA DE FRANKL

Diz-se que uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos é *fechada para reuniões* se a reunião de dois quaisquer conjuntos de $\mathcal{F}$ for ainda um conjunto de $\mathcal{F}$. Ou seja, se $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$. Em 1979, Péter Frankl conjecturou que numa qualquer família finita de conjuntos finitos que seja fechada para reuniões existe um elemento que pertence a pelo menos metade dos conjuntos da família, desde que esta famíla contenha pelo menos um conjunto que não é vazio. Mais precisamente, se m for o número de elementos de $\mathcal{F}$, então o que é afirmado é que existe um elemento que pertence a pelo menos

$\lceil \frac{m}{2} \rceil$ conjuntos em $\mathcal{F}$, onde $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro que é maior do que ou igual a x.

Um exemplo de uma famíla nas condições referidas é a família $\mathcal{F}$ dos subconjuntos não-vazios do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6} que só têm números pares. Ou seja,

$$\mathcal{F} = \{\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, \{2,4,6\}\}.$$

É claro que esta família é fechada para reuniões, pois a reunião de dois conjuntos que só contêm números pares também só contém números pares. Note-se que, neste exemplo, cada elemento pertence a exactamente 4 $(= \lceil \frac{7}{2} \rceil)$ dos 7 conjuntos em $\mathcal{F}$.

Para mais detalhes sobre esta conjectura, ver: *http://mathworld.wolfram.com/Union-ClosedSetsConjecture.html* e *http://www.combinatorics.org/Volume_15/Abstracts/v15i1r88.html.*

A CONJECTURA DE CASAS-ALVERO

Em 1998–99, o matemático espanhol Eduardo Casas-Alvero, da Universidade de Barcelona, tropeçou no seguinte problema[1]:

Um polinómio não-nulo, de coeficientes complexos, que tem uma raiz em comum com cada uma das suas derivadas não-constantes é necessariamente uma potência de um polinómio linear?

A resposta a esta pergunta continua em aberto, conjecturando-se que é afirmativa. Para mais informações, ver o artigo "Casas-Alvero Conjecture", da autoria de Jan Draisma e Johan P. de Jong, publicado na Newsletter da EMS (pp. 29–33), e disponível em: *http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2011-06-80.pdf.* Ver ainda o curioso *applet* elaborado por Johan P. de Jong e disponível em: *http://www.win.tue.nl/~jdraisma/index.php?location=recreational.*

De muitas mais conjecturas com enunciados simples se poderia aqui falar. O leitor interessado em conhecer algumas mais deverá consultar o "Jardim dos Problemas em Aberto", em: *http://garden.irmacs.sfu.ca.*

Termino esta rubrica desejando que o leitor se divirta com alguns destes problemas, mas reiterando os cuidados acima referidos para os potenciais perigos de contracção de obsessões patogénicas. Recomenda-se o máximo cuidado!

[1] Ver: *http://gaussianos.com/la-conjetura-de-casas-alvero-contada-por-eduardo--casas-alvero.*