Os Cubos do Príncipe

António Pereira Rosa
Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho

antoniopereirarosa@gmail.com

INTRODUÇÃO

Suponhamos que dispomos de um cubo de pedra ou madeira e nele escavamos um túnel. Se a secção desse túnel for um quadrado, será certamente possível usá-lo para fazer passar um novo cubo (possivelmente mais pequeno do que o primeiro) através do cubo inicial. No século XVII, o príncipe Rupert[1], sobrinho do rei Carlos I de Inglaterra, colocou, na forma de uma aposta, uma questão cuja resposta parece ser obviamente negativa: será possível fazer passar um cubo *maior* (ou igual, nalgumas versões da história) através do cubo original? A surpreendente resposta é **Sim!** e foi dada alguns anos mais tarde por John Wallis[2].

Neste trabalho veremos como é possível obter este resultado com conhecimentos a nível de 11º ano de Matemática A (cursos de Ciências e Tecnologias ou de Ciências Socioeconómicas) ou de Matemática B e Geometria Descritiva (curso de Artes Visuais) e referiremos brevemente uma outra solução para o problema, obtida em finais do século XVIII pelo matemático holandês Pieter Nieuwland[3].

A SOLUÇÃO DE WALLIS

A solução de Wallis para a questão dos cubos do príncipe baseia-se na sua redução a um problema de geometria plana, a inserção de um quadrado num hexágono regular. Wallis procurou uma solução com uma característica adicional, não exigida na formulação da aposta: o "túnel" de secção quadrada a "escavar" no cubo vai ter como eixo principal a diagonal espacial, pelo que o centro de cada quadrado que representa a secção do "túnel" fica sobre essa diagonal.

Consideremos um cubo de aresta 1; vamos determinar a sua projecção ortogonal sobre um plano contendo um vértice e perpendicular à diagonal espacial que passa por esse mesmo vértice. Comecemos por escolher a posição do nosso cubo num referencial o.n. directo de R^3. Uma ideia natural consiste em fazer coincidir um dos vértices do cubo com a origem, tomar como recta suporte da diagonal espacial que por ele passa o eixo Oz e projectar o cubo sobre o plano xOy (a posição do cubo da Ribeira, ver a figura 1).

[1] Rupert do Reno (1619-1682), general, almirante e administrador colonial inglês. Foi artista de mérito e membro fundador da Royal Society, distinguindo-se pelas suas descobertas em metalurgia e gravação de imagens; veja-se [5].

[2] John Wallis (1616-1703) foi o principal matemático inglês da geração anterior a Newton. Deixou o seu nome ligado ao estudo das cónicas por meio da geometria analítica e aos métodos infinitesimais, nomeadamente ao cálculo de integrais e ao conhecido *produto de Wallis* $\frac{\pi}{2} = \frac{2\times 2\times 4\times 4\times 6\times 6\times\ldots}{1\times 3\times 3\times 5\times 5\times 7\times\ldots}$; veja-se [1] ou [3].

[3] Pieter Nieuwland (1764-1794), matemático, químico e poeta, foi professor na Universidade de Leiden; nada publicou em vida sobre o problema dos cubos e a sua contribuição foi dada a conhecer apenas em 1816, num livro de geometria escrito por um dos seus professores, J. H. van Swinden, que a tinha encontrado no espólio de Nieuwland. Para a história do problema, nomeadamente no que diz respeito às contribuições dos matemáticos referidos, consulte-se [6] ou [2], que contêm uma versão algo diferente da história do problema dos cubos.

Apostar que se consegue fazer passar um cubo de aresta 31 por um cubo de aresta 30? Uma aposta para perder! No entanto, no século XVII, o príncipe Rupert fê-la... e ganhou.

Figura 1 ›

Esta escolha tem o inconveniente de levar a cálculos desnecessariamente complicados: por exemplo, o outro extremo da diagonal espacial em causa terá as coordenadas $(0,0,\sqrt{1^2+1^2+1^1}) = (0,0,\sqrt{3})$ (supondo que todos os pontos do cubo têm cota não negativa) e para os restantes vértices o resultado é ainda pior. Assim, vamos considerar o cubo de vértices

A(1,0,0), B(1,1,0), C(0,1,0), O(0,0,0), D(1,0,1), E(1,1,1), F(0,1,1) e G(0,0,1)

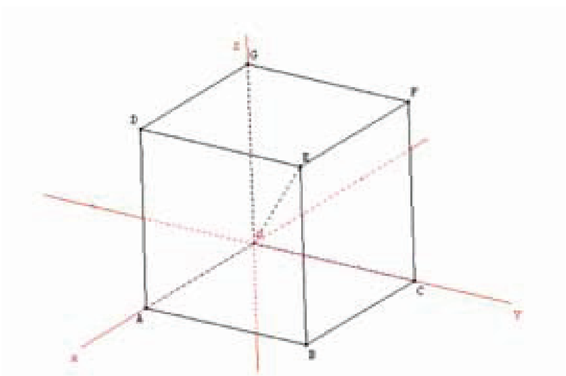

Figura 2

(figura 2) e fazer a sua projecção sobre o plano π, que passa na origem e é perpendicular à recta DE. Como $\overrightarrow{DE} = E - D = (1,1,1)$, resulta imediatamente que o plano π pode ser definido por $x+y+z=0$.

Para cada ponto $X \in \mathbb{R}^3$, seja X' a sua projecção sobre o plano π; é óbvio que $O' = O$ e que $E' = O$. Vejamos como determinar as imagens dos seis restantes vértices do cubo, que vão definir um hexágono no plano π (figura 3).

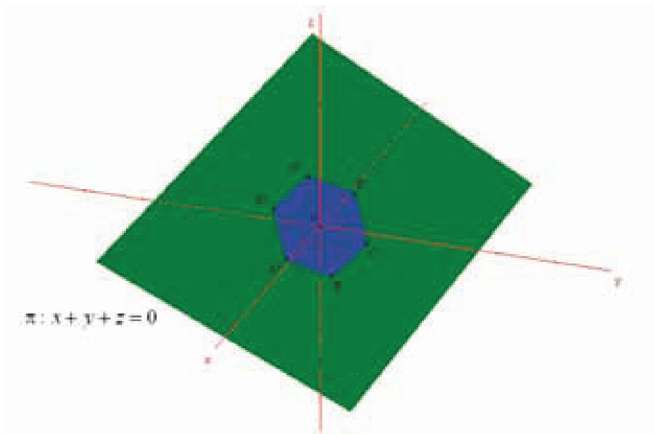

Figura 3

Seja então A(1,0,0); para determinar A' basta obter a intersecção da recta a, que incide com o ponto A e tem como vector director $\overrightarrow{DE} = (1,1,1)$ com o plano π. A referida recta pode ser definida pelas equações

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1};$$

resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \\ x+y+z=0 \end{cases},$$

obtemos

$$A'\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

As coordenadas dos restantes vértices do hexágono podem ser obtidas de forma análoga, pelo que nos limitamos a indicar os resultados:

$$B'\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right), C'\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right), D'\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),$$
$$F'\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), G'\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right).$$

Para comprovar que o hexágono é regular, basta:

1) Calcular os comprimentos $\overline{A'D'}, \overline{D'G'}, \overline{G'F'}, \overline{F'C'}, \overline{C'B'}$ e $\overline{B'A'}$ e verificar que são todos iguais.

2) Constatar que os ângulos internos de vértices A', D', G', F', C' e B' têm amplitude 120º.

Vejamos, a título de exemplo, os cálculos de $\overline{A'D'}$ e de $A'\hat{D}'G'$.

$$\overline{A'D'} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\begin{aligned} A'\hat{D}'G' = \overrightarrow{D'A'} {}^\wedge \overrightarrow{D'G'} &= \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{D'A'} \cdot \overrightarrow{D'G'}}{\|\overrightarrow{D'A'}\| \times \|\overrightarrow{D'G'}\|}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{-1/3}{\sqrt{2/3} \times \sqrt{2/3}}\right) \\ &= \cos^{-1}(-1/2) = 120^\circ \end{aligned}$$

Concluímos assim a primeira parte do nosso programa, a redução a uma questão de geometria plana: será possível inscrever num hexágono regular de lado $\sqrt{2/3}$ um quadrado de lado superior a 1?

Consideremos a figura seguinte:

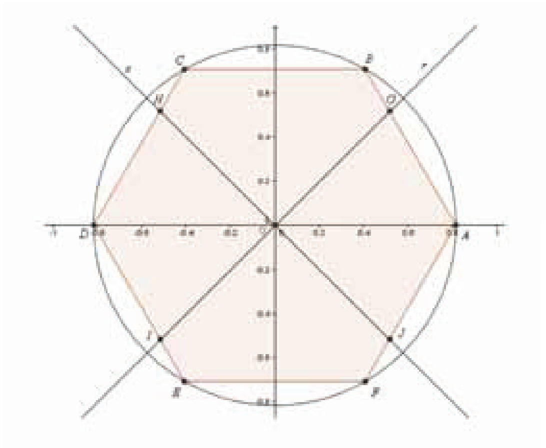

Figura 4

Nela está representado um hexágono regular $[ABCDEF]$, centrado na origem e de lado $\sqrt{2/3}$, no qual pretendemos inscrever um quadrado de lado superior a 1; a simetria da figura sugere o traçado do quadrado (também centrado na origem) a partir das suas diagonais, que vão ser as bissectrizes dos quadrantes. Como o lado do hexágono inscrito numa circunferência é igual ao raio, os pontos A e B têm as coordenadas

$$(\sqrt{2/3}, 0) \ \text{ e } \ \sqrt{2/3}(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

respectivamente, pelo que a recta AB pode ser definida por $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{2}$. Para determinar as coordenadas do ponto G, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} y = x \\ y = -\sqrt{3}x + \sqrt{2} \end{cases}$$

cuja solução é $x = y = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

Vemos assim que o lado do quadrado é $2x = \sqrt{6} - \sqrt{2} > 1$ e segue-se o resultado. Conclui-se ainda que o maior cubo que pode atravessar um cubo de aresta 1 *quando se usa o método de Wallis* tem de aresta $\sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1.035$; em particular, um cubo de aresta 31 pode atravessar um cubo de aresta 30!

UM PROCESSO ALTERNATIVO

Wallis e os seus contemporâneos utilizaram um processo diferente do descrito na secção anterior para estudar a projecção do cubo sobre o plano π; recorreram a técnicas que actualmente são estudadas em Geometria Descritiva (veja-se [4] ou [6]).

Admitiram como óbvio que a projecção do cubo é um hexágono regular e determinaram o seu lado por um raciocínio muito simples. Repare-se que a diagonal facial $[DF]$ do cubo, de comprimento $\sqrt{2}$, é paralela ao plano π, pelo que o seu comprimento não é alterado pela projecção. Assim[4], representando por X o ponto médio de $[DF]$, tem-se que (ver figuras 5 e 6):

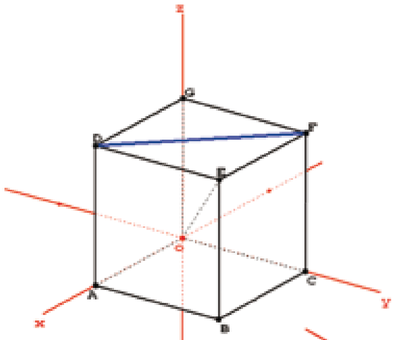

Figura 5

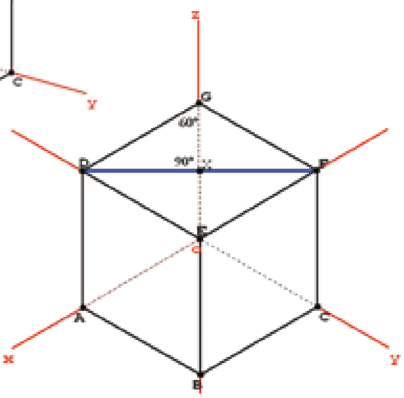

Figura 6

- $\overline{DX} = \sqrt{2}/2$;

- no triângulo rectângulo $[DXG]$, sen $60^\circ = \dfrac{\overline{DX}}{\overline{DG}}$,

donde

$$\sqrt{3}/2 = \frac{\sqrt{2}/2}{\overline{DG}} \ \text{ e } \ \overline{DG} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

A redução do problema dos cubos à inscrição de um quadrado num hexágono está assim concluída e o estudo prossegue como anteriormente. Esta apresentação alternativa, para além de ter interesse histórico, permite que o problema dos cubos seja apresentado a alunos de Matemática B do curso de Artes Visuais, que têm bons conhecimentos de Geometria Descritiva mas que pouco sabem de geometria analítica no espaço.

[4] Para evitar sobrecarregar as figuras, utilizámos as mesmas letras para os vértices do cubo e para as suas projecções.

A CONTRIBUIÇÃO DE NIEUWLAND

Pieter Nieuwland abordou o problema dos cubos de uma perspectiva diferente; deixou cair a restrição de Wallis de que o eixo do "túnel" deveria coincidir com uma diagonal espacial e procurou determinar a secção quadrada de maior lado que é possível obter seccionando o cubo unitário por um plano. Não vamos fazer aqui a prova de que a secção que ele encontrou é efectivamente a maior possível (o leitor interessado pode encontrá-la em [2]), limitando-nos a apresentá-la e a mostrar que o lado da secção é maior do que o lado do quadrado de Wallis.

Consideremos os três pontos $P(1, 1/4, 0)$, $Q(3/4, 0, 1)$ e $R(0, 3/4, 1)$. Verifica-se imediatamente que $P \in [AB]$, $Q \in [DG]$ e $R \in [FG]$. O plano PQR, que pode ser definido por $4x + 4y + 2z - 5 = 0$, intersecta a aresta $[BC]$ no ponto $S(1/4, 1, 0)$ (ver figura 7).

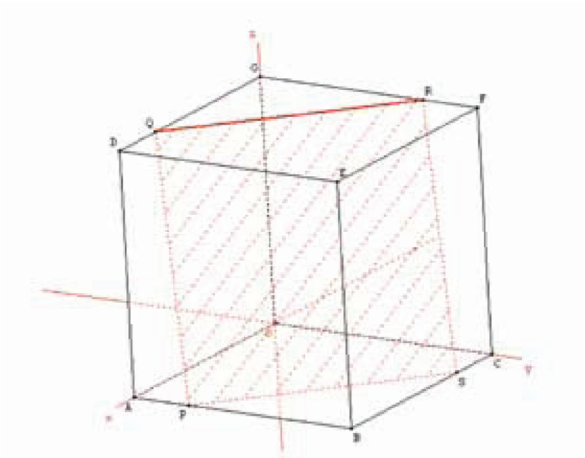

Figura 7

Afirmamos que o quadrilátero $[PQRS]$ é um quadrado, de lado $3\sqrt{2}/4$; como este número é ligeiramente superior a 1,06, temos aqui uma solução de lado superior à de Wallis. Para comprovar estas afirmações, basta:

1) Calcular os comprimentos $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RS}$ e $\overline{PS}$ e verificar que são todos iguais a $3\sqrt{2}/4$.

2) Constatar que os ângulos internos de vértices P, Q, R e S são rectos.

Como os cálculos são muito semelhantes aos feitos anteriormente, vamos fazê-los apenas para o lado $[PQ]$ e o ângulo PQR.

- $\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{3}{4} - 1\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{4}\right)^2 + (1-0)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} > \sqrt{6} - \sqrt{2};$

- O ângulo PQR é recto, pois
$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1\right) = 0.$$

Para concluir, e a título de curiosidade, reparemos que a secção de área máxima tem área racional:
$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{9}{8}.$$

REFERÊNCIAS

[1] Boyer, C. B e Merzbach, U. C. (1989), *A History of Mathematics* (2nd edition), John Wiley and Sons, New York.

[2] "El Problema del Cub" (2007), Full no. 61 (publicação da Facultat de Matemàtiques i Estadística, Universitat Politècnica de Catalunya), disponível em *http://upcommons.upc.edu/revistes/bitstream/2099/6535/4/full_61.pdf* e *www.fme.upc.edu/arxius/el.../solucio_cub.pdf*

[3] Hollingdale, S. (1989), *Makers of Mathematics*, Penguin Group, London.

[4] Melzak, Z. A. (1983), *Invitation to Geometry*, John Wiley and Sons, New York.

[5] "Prince Rupert" (artigo na Wikipedia).

[6] Rickey, V. F. (2005), "Dürer Magic Squares, Cardano's Rings, Prince Rupert Cube's and Other Neat Things" (trabalho apresentado num curso de matemática recreativa da Mathematical Association of America, disponível em *http://www.math.usma.edu/people/rickey/papers/ShortCourseAlbuquerque.pdf*)

SOBRE O AUTOR

António Pereira Rosa é licenciado em Matemática (1986) e mestre em Matemática para o Ensino (2008) pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É professor do quadro da Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho desde 1994.