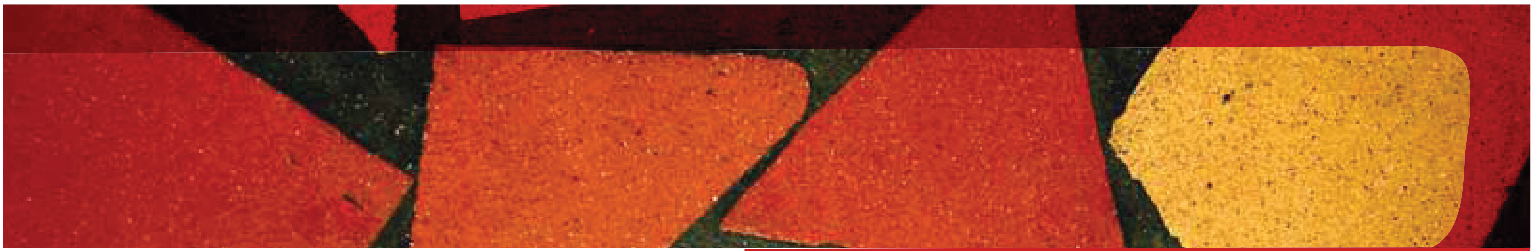

Manuel Silva
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

Pedro J. Freitas
Universidade de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

A **GEOMETRIA** SEGUNDO **PAUL ERDŐS**

Será que ainda é possível formular problemas interessantes em geometria plana? Vamos apresentar três exemplos no contexto da geometria de incidência combinatória, uma área que muito deve à imaginação do incansável Paul Erdős.

Iremos considerar configurações finitas de pontos e rectas no plano euclidiano, embora os enunciados aqui discutidos façam sentido em contextos mais gerais, substituindo $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}^n$ por exemplo, e as rectas por circunferências ou outras curvas algébricas.

1. SZEMERÉDI-TROTTER

Dado um ponto P e uma recta r no plano, dizemos que P incide com r se P pertencer à recta r.

Problema 1. Dados n pontos e m rectas no plano, qual o número máximo de incidências possível?

Denotando por $I = I(n, m)$ o número máximo de incidências referido no problema, sabemos que $I \leq nm$, mas será que existe alguma configuração de pontos e rectas que atinja este valor? Certamente que não, excepto nos casos degenerados: todos os pontos numa única recta, ou todas as rectas a passar num ponto único comum. A obstrução reside naturalmente no postulado de Euclides que afirma que por dois pontos passa uma única recta. Um resultado bastante útil e que foi conjecturado por Erdős dá-nos o melhor valor assimptótico possível para $I(n, m)$.

Teorema 1 (Szemerédi-Trotter). Dados n pontos e m rectas no plano, o número de incidências não excede $O\left(n^{2/3}m^{2/3} + n + m\right)$ e há configurações de pontos para as quais este limite superior é assimptoticamente atingido.

Existem diversas demonstrações deste resultado desde a inicial [1]. Székely em [2] usou o método probabilístico de Erdős e uma medida do grau de planaridade de um grafo, conhecido pelo *número de cruzamentos*, e que corresponde ao número de intersecções mínimo entre todas as representações de um grafo no plano, para demonstrar o resultado de Szemerédi-Trotter. O argumento de Székely admite diversas generalizações, por exemplo podemos considerar configurações de pontos e circunferências ou outras curvas desde que estas se intersectem num número uniformemente limitado de pontos.

2. NÚMERO DE DISTÂNCIAS DISTINTAS

O problema seguinte foi proposto por Erdős em [3] há cerca de 60 anos.

Problema 2. Qual o número mínimo de distâncias distintas determinado por um conjunto de n pontos no plano?

Definimos uma função $f(n)$ como sendo o número mínimo possível de distâncias determinadas por conjuntos S com $|S| = n$. Por exemplo, $f(3) = 1$ e $f(4) = 2$, onde os pontos são, respectivamente, vértices de um triângulo equilátero e de um quadrado. Um conjunto de n pontos colineares equidistantes entre si definem $n-1$ distâncias distintas, o que mostra que embora o número de distâncias possível seja quadrático $\binom{n}{2}$, a função $f(n)$ é no máximo linear.

Erdős mostrou que

$$\sqrt{n} \ll f(n) \ll n/\log(n)^{1/2}$$

e conjecturou que a função $f(n)$ deveria ser linear a menos de um factor logarítmico. O majorante quase linear corresponde a uma grelha de pontos de tamanho $\sqrt{n}$ por $\sqrt{n}$. Determinar o número de distâncias distintas nesta grelha é equivalente ao problema clássico em teoria de números de representar um natural como soma de dois quadrados. Para obter o minorante $\sqrt{n}$ basta fixar um ponto $P \in S$ e considerar todas as circunferências com centro em P e que passam por algum ponto de S. Dizemos que estas circunferências cobrem o conjunto S. Se existirem pelo menos circunferências com centro em P o resultado já está provado. Caso contrário, terá de existir uma circunferência com pelo menos n pontos e consequentemente, uma semicircunferência com pelo menos $\frac{\sqrt{n}}{2}$ pontos. As distâncias entre um ponto extremo desta semicircunferência aos outros pontos são necessariamente distintas, de onde resulta o minorante $f(n) \gg \sqrt{n}$.

A estimativa assimptótica da função $f(n)$ foi sucessivamente melhorada $f(n) \gg n^{2/3}$ por Leo Moser em 1952, $f(n) \gg n^{5/7}$ por Fan Chung em 1984, $f(n) \gg \frac{n^{4/5}}{\ln n}$ por Fan Chung, Endre Szemerédi e W. T. Trotter em 1992, $f(n) \gg n^{4/5}$ por László Székely em 1993, $f(n) \gg n^{6/7}$ por József Solymosi e C. D. Tóth em 2001.

O problema foi finalmente resolvido em 2011 por Netz Katz e Larry Guth [4], sendo previsível que as técnicas desenvolvidas e usadas no argumento venham a ser úteis noutros problemas.

Teorema 2 (Guth e Katz). $f(n) \gg \dfrac{n}{\ln n}$.

O argumento usa diversas ideias, combinadas de modo bastante engenhoso.

Uma delas é considerar a geometria das transformações rígidas do plano, em vez de considerar simplesmente pontos e rectas. Sendo poderosa, esta é uma ideia bastante natural, uma vez que as distâncias são preservadas por estas transformações.

Outra ideia central é o uso do conhecido *teorema da sandwich*, o qual nos diz, por exemplo, que, dados dois conjuntos limitados no plano, existe necessariamente uma recta que divide os dois simultaneamante ao meio, ou em dimensão 3: dados três conjuntos limitados (mensuráveis) no espaço, existe um plano que divide os três (pão, queijo e fiambre) ao meio. Se em vez de rectas e planos usarmos um conjunto polinomial podemos generalizar este tipo de resultado. Estes resultados são contínuos, mas têm equivalentes naturais discretos mais relevantes para o nosso problema. Com estes ingredientes podemos obter uma subdivisão equilibrada do conjunto de pontos inicial através de uma curva polinomial $P(x, y) = 0$, que o divide em células que têm, essencialmente, o mesmo número de pontos. E a partir daqui basta fazer as contas como alguém com razão dizia.

3. UMA CONJECTURA DE ULAM

Terminamos com um pequeno desafio ao leitor e uma conjectura de Ulam.

Desafio. Construir um conjunto de 7 pontos não colineares no plano de modo a que todas as distâncias entre pares de pontos sejam números inteiros.

Na verdade existem configurações no plano com um número arbitrariamente grande de pontos tais que todas as distâncias são inteiras. Não existe no entanto um conjunto infinito de pontos no plano (não colineares) com todas as distâncias inteiras. O argumento é simples desde que o leitor se lembre da definição geométrica de hipérbole e foi obtido por Erdős e Anning.

E se em vez de distâncias inteiras considerarmos distâncias racionais, será que os problemas são equivalentes? Naturalmente para configurações finitas podemos transformar uma configuração *racional* numa em que as distâncias são inteiras através de uma ampliação. No entanto, surpreendentemente, existem conjuntos infinitos de pontos com todas as distâncias racionais!

Em [5] demonstra-se que as únicas curvas algébricas irredutíveis que podem conter um conjunto infinito racional de pontos são as rectas e as circunferências. Assim, não é possível, por exemplo, escolher um conjunto infinito racional de pontos numa parábola.

Terminamos apresentando uma conjectura que, para variar, foi sugerida por Ulam a Erdős.

Conjectura (Ulam 1945). Não existem conjuntos densos de pontos no plano com todas as distâncias racionais.

REFERÊNCIAS

[1] Endre Szemerédi, William T. Trotter, ”Extremal problems in discrete geometry”, *Combinatorica* 3 (3–4), 1983, 381–392.

[2] László A.Székely “Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry”, *Combinatorics, Probability and Computing* 6 (3), 1997, 353–358.

[3] P. Erdős, “On the set of distances of *n* points”, *The American Mathematical Monthly* 53, Maio de 1946, 248-250.

[4] L. Guth; N. H. Katz, *On the Erdős distinct distance problem on the plane*. ar- Xiv:1011.4105 (2010)

[5] József Solymosi, Frank de Zeeuw, “On a Question of Erdős and Ulam”, *Discrete and Computational Geometry* 43(2), 2010, 393-401.

[6] J. Garibaldi, A. Iosevich, S. Senger *The Erdős Distance Problem*, Providence, RI: American Mathematical Society (2011)