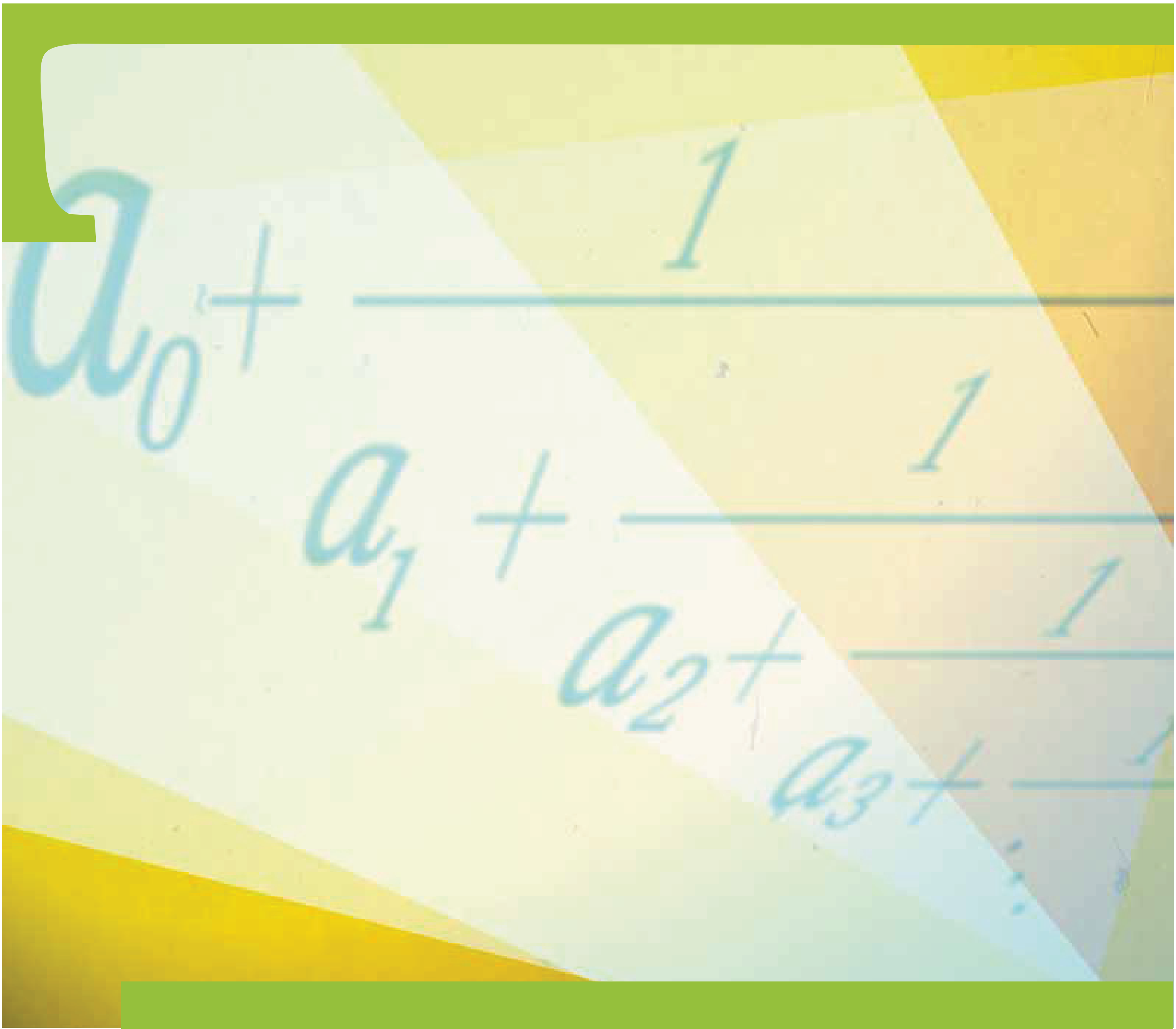


Sucessões e Frações Contínuas

João Carreira Paixão
Escola ES/3 de Maria Lamas
jcpaixao@gmail.com

Atualmente a representação de números reais na notação decimal parece ser a mais óbvia, mas nem sempre foi assim. Uma outra forma de representar números reais, que recorre a uma sucessão de frações encaixadas umas nas outras, esteve em particular destaque nos meios científicos entre os sécs. XVII e XIX. Embora menos conhecida, a representação em forma de fração contínua é ainda utilizada em estudos e trabalhos recentes. Neste artigo, fundamentando resumidamente do ponto de vista teórico as tarefas propostas, iremos apresentar uma forma de trabalhar com frações contínuas no ensino secundário em conexão com o estudo das sucessões alternadas convergentes.

Enquanto se estudam as sucessões no 11º ano podemos confrontar os alunos com uma interrogação: "Não haverá outro tipo de sucessões alternadas convergentes para além daquelas cujo termo geral apresente uma potência de base -1?".

Uma possível resposta reside no estudo de um tipo de representação dos números reais, pouco conhecida mas muito interessante. Essa representação designa-se por *Fração Contínua* e toma a forma de:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}, \text{ onde } a_0 \in \mathbb{Z} \text{ e } a_i \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}$$

ou escrita de forma compacta, $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

Há registos desde o séc. V do desenvolvimento em fração contínua de números. Em particular, o matemático hindu Aryabhata (476 d.C.) terá usado um método semelhante para resolver equações diofantinas (encontrar as soluções inteiras de equações com uma ou mais incógnitas), assim designadas em homenagem ao matemático grego Diofanto de Alexandria (250 a.C.), sem contudo apresentar um método geral.

Mais tarde, o também matemático hindu Bahscara II, no séc. XII, generalizou o processo para resolver equações diofantinas a partir de um desenvolvimento semelhante a uma fração contínua de um número. Já em 1575, no livro *Álgebra*, Rafael Bombelli (1526-72) usa este tipo de fração para aproximar raízes quadráticas (por exemplo $\sqrt{13}$). Também Pietro Cataldi (1548-1626) apresenta um desenvolvimento para $\sqrt{18}$. Contudo, nenhum dos dois aprofundou a generalização em fração contínua.

É em 1692, e depois de Lord Brouncker (1602-84) ter apresentado o desenvolvimento de $\frac{4}{\pi} = [1; 3, 1, 1, 1, 15, 2, \ldots]$[1] em fração contínua, que surge pela primeira vez o termo, introduzido pelo matemático inglês John Wallis (1616-1703) no seu livro *Opera Mathematica I*[2]. Neste período, mais precisamente em 1685, o matemático e astrónomo holandês Christian Huygens (1629-95) apresenta uma aplicação das frações contínuas no cálculo da razão entre rodas dentadas para a construção de um planetário mecânico. Euler (1707-83) em 1737, no livro *De Fractionibus Continuis*, provou que qualquer irracionalidade quadrática (uma raíz de um polinómio do segundo grau com coeficientes inteiros) é expressa por uma fração contínua infinita periódica, tendo criado um método para encontrar as frações contínuas de raízes de uma equação do 2º grau com coeficientes inteiros. Euler apresentou também a expressão para o número e em fração contínua. Johan Lambert (1728-77) usou o trabalho de Euler para provar que se x fosse um racional diferente de 0, então e^x e $\tan x$ não podiam ser racionais. Durante o séc. XX, as frações contínuas foram aplicadas para deduzir algoritmos computacionais, destacando-se o trabalho de Daniel Shanks que, em abril de 1954, descreve um método para calcular logaritmos a partir do desenvolvimento em frações contínuas, tirando partido da "rapidez" de cálculo dos computadores da altura. Também queremos evidenciar o trabalho de M. A. Morrison e J. Brillhart que, em 1975, desenvolveram um algoritmo de fatorização prima, baseado no desenvolvimento em frações contínuas, o mais rápido até 1981, ano em que foi proposto o Método da Rede/Malha Quadrática por Carl Pomerance. Por fim, vale a pena referir que no estudo de sistemas dinâmicos

[1] A fracção contínua apresentada por Brouncker não tinha este formato e apresenta-se apenas como exemplo.

[2] Wallis e Brouncker foram co-fundadores da Royal Society.

caóticos se tem recorrido a propriedades das frações contínuas para analisar comportamentos e justificar resultados.

Sabe-se que qualquer número real pode ser representado por uma fração contínua. Para encontrar a fração contínua de um número real x, basta seguir o algoritmo seguinte:

1) Se $x > 1$ siga para 2, se $0 < x < 1$ siga para 3 (o procedimento é análogo para os reais negativos).

2) Subtraia a x a sua parte inteira; se o resto for zero, o processo pára, se não, siga para 3.

3) Inverta o número que se obtém e volte a 1.

Os números inteiros que se vão obtendo ao longo do processo formam a fração contínua correspondente.

Como exemplo, escreva-se a fração contínua para $\frac{13}{7}$.

$\frac{13}{7} - 1 = \frac{6}{7}, a_0 = 1$ é a parte inteira de $\frac{13}{7}$

$\frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}, a_1 = 1$ é a parte inteira de $\frac{7}{6}$

$6 - 6 = 0, a_2 = 6$ termina o processo.

Subtraíram-se ao longo da iteração do algoritmo os números 1 (duas vezes) e 6, pelo que

$$\frac{13}{7} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}.$$

Proposta 1: Confirme que esta igualdade se verifica.

Proposta 2: Escreva as frações contínuas dos números (use a calculadora para os irracionais):

a) $\frac{35}{12}$ b) $\sqrt{2}$ c) π

Como provavelmente reparou, há enormes diferenças entre o primeiro e os restantes números. Euler esclareceu-nos esta questão por completo quando provou o seguinte teorema.

Teorema: Um número real é racional se e só se for representado por uma fração contínua finita.

Este teorema permite concluir que os números irracionais são necessariamente escritos na forma de uma fração contínua infinita.

Que a qualquer número real x se pode associar uma fração contínua não oferece qualquer dúvida, basta verificar o algoritmo já apresentado.

No que se segue mostraremos que essa fração representa, num sentido técnico bem preciso que será esclarecido a seguir, esse número real x. Mas antes disso, provaremos que qualquer fração contínua representa, sempre no sentido que será abaixo precisado, um número real (e é aqui que se introduzem as sucessões alternadas). Juntando os dois factos, ficará estabelecida uma bijeção entre números reais e frações contínuas.

Observe-se um conceito fundamental para este estudo.

Se uma fração contínua for truncada a partir de certa ordem, obtém-se uma outra fração contínua, que por ser finita corresponde necessariamente a um número racional e, como tal, se representa por um número fracionário. As frações obtidas por esta via são designadas por *frações reduzidas*. Se truncarmos a fração a partir de certa ordem k, obtemos $C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k], k \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{N}(k \neq 0), a_0 \in \mathbb{Z}$.

Por exemplo, $\frac{13}{7}$ tem como frações reduzidas

$C_0 = 1,$

$C_1 = 2 = 1 + \frac{1}{1}$

e $C_2 = \frac{13}{7} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}.$

Como vemos, a última reduzida coincide com a fração inicial, e isto ocorre sempre que a fração contínua é finita, ou seja, que representa um número racional.

Se a fração contínua for infinita teremos uma infinidade de reduzidas. A título de exemplo, apresentam-se as três primeiras reduzidas de

$\pi : C_0 = 3,$

$C_1 = \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$

e $C_2 = \frac{333}{106} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}}$

Uma observação: é notável que a fração $\frac{22}{7}$ tenha sido usada como aproximação de π por Arquimedes, não é conhecida a razão pela qual o sábio grego terá utilizado este valor, mas, recorrendo à teoria das *frações contínuas*, será possível compreender que esta aproximação é de um nível de exatidão impossível de obter com uma outra fração com denominador igual ou inferior ao desta. É usual referir-se que se trata de uma aproximação vantajosa. Na parte final do artigo, explicar-se-á esta afirmação com outro pormenor.

Da construção das frações reduzidas pode estabelecer-se uma regra geral de cálculo do numerador e do denominador de cada fração. Por recorrência tem-se que:

$$C_0 = \frac{p_0}{q_0}, C_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

$$\text{e } \forall k > 1, k \in \mathbb{N}, C_k = \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-1}a_k + p_{k-2}}{q_{k-1}a_k + q_{k-2}}$$

Esta relação de recorrência prova-se facilmente por indução, bastando para tal ter em atenção que para se obter a fração reduzida de ordem $k+1$, substitui-se a_k na anterior por $a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}$.

A partir daqui pode construir-se um quadro geral que facilita o cálculo de cada uma das reduzidas:

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_k
p_i	a_0	$a_0 a_1 + 1$	$p_1 a_2 + p_0$	$\ldots$	$p_{k-1}a_k + p_{k-2}$
q_i	1	a_1	$q_1 a_2 + q_0$	$\ldots$	$q_{k-1}a_k + q_{k-2}$

No que se segue, provaremos que a sucessão das reduzidas é uma sucessão convergente. Começamos por observar que, comparando duas reduzidas consecutivas, se verifica a seguinte relação:

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1}}{q_{k+1}q_k}$$

$$= \frac{p_k a_{k+1} q_k + p_{k-1}q_k - p_k q_k a_{k+1} - p_k q_{k-1}}{q_{k+1}q_k}$$

$$= \frac{p_{k-1}q_k - p_k q_{k-1}}{q_{k+1}q_k} = -\frac{p_k q_{k-1} - p_{k-1}q_k}{qk+1q_k}$$

$$= (-1)^k \frac{p_1 q_0 - p_0 q_1}{q_{k+1}q_k} = \frac{(-1)^k}{q_{k+1}q^k}.$$

$$\text{Logo, } \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{q_{k+1}q_k} = 0 \quad (i)$$

sendo por construção $0 < q_0 < \cdots < q_k < q_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$.

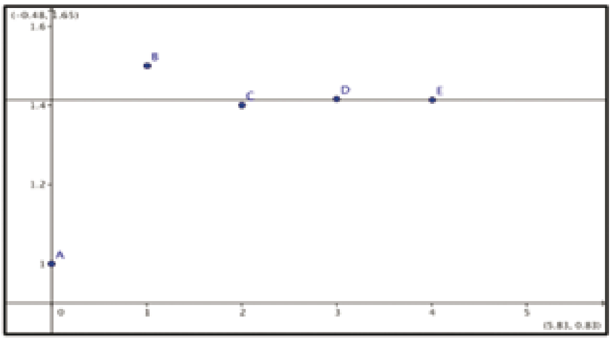
Também daqui resulta a propriedade fundamental das reduzidas

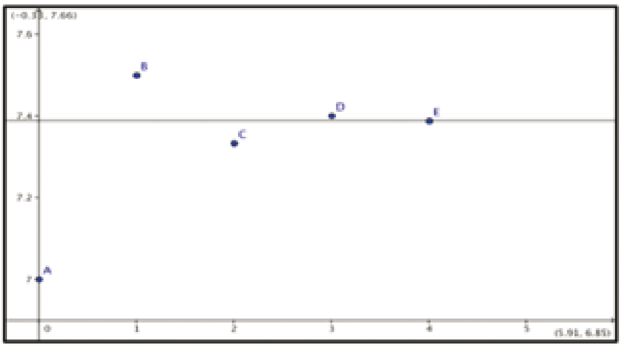
$$p_{k+1}q_k - q_k q_{k+1} = (-1)^k \qquad \text{(ii)}$$

Proposta 3: Calcule as cinco primeiras reduzidas de $\sqrt{2}$ e e^2.

Proposta 4: Represente num referencial ortogonal, para cada um dos valores anteriores, os pontos de coordenadas $\left(k, \frac{p_k}{q_k}\right)$. O que é que observa?

Proposta 5: Represente em cada referencial ortogonal, construído na proposta anterior, a equação $y = \alpha$, sendo $\alpha = \sqrt{2}$ ou $\alpha = e^2$, respetivamente. (Usando um *software* de geometria, como o GeoGebra, poderá obter resultados como os seguintes)





Continuando com a prova da convergência das frações reduzidas de uma dada fração contínua, comparamos duas frações reduzidas consecutivas com a mesma paridade:

$$\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k+2}q_k - p_k q_{k+2}}{q_{k+2}q_k}$$

$$= \frac{p_{k+1}a_{k+2}q_k + p_k q_k - p_k q_{k+1}a_{k+2} - p_k q_k}{q_{k+2}q_k} =$$

$$= \frac{a_{k+2}(p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1})}{q_{k+2}q_k} = \frac{a_{k+2}(-1)^k}{q_{k+2}q_k} \qquad \text{(iii)}$$

esta última igualdade resulta de (ii).

Denotando $C_k = \dfrac{p_k}{q_k}$, conclui-se que

$$C_1 - C_0 > 0, C_2 - C_1 < 0 \quad \text{e} \quad C_2 - C_0 > 0,$$

ou seja, $C_0 < C_2 < C_1$.

Generalizando,

$C_0 < C_2 < C_4 < \cdots < C_{2k} < \cdots < C_{2k+1} < \cdots < C_5 < C_3 < C_1$,

isto porque da igualdade (iii) é possível constatar que a subsucessão de reduzidas de ordem par é crescente e a de ordem ímpar é decrescente. Também de (ii) se conclui que as de ordem par representam números menores do que as adjacentes de ordem ímpar.

Tendo em conta que já provámos que a diferença entre reduzidas consecutivas tende para zero, recorrendo ao *Axioma dos Intervalos Encaixados de Cantor* (na reta real para cada sucessão de intervalos fechados encaixados e cujo comprimento tenda para zero, existe um e um só ponto que pertença a todos os intervalos), prova-se que a sucessão das reduzidas de uma qualquer fração contínua tende para um número real. Neste sentido, dizemos que qualquer fração contínua representa um número real. Contudo, é ainda necessário esclarecer se a fração contínua obtida a partir de um número real fixado α, usando o algoritmo apresentado acima, representa mesmo o número que lhe deu origem. Para provar que é esse o caso, comparemos duas reduzidas adjacentes

$$C_k = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k] = = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

e $C_{k+1} = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}] =$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1}}}}}},$$

com o número real α escrito de uma forma oportuna. Mais precisamente, vamos escrever α na forma

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, \alpha_k] = = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{\alpha_k}}}}, \; \alpha_k \in \mathbb{R}^+.$$

onde α_k é o inverso da parte decimal depois da *k-ésima* iteração do algoritmo para desenvolver a em fração contínua. Por exemplo, temos que:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} \quad \text{ou}$$

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}} \text{ ou } \alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\alpha_3}}}, \text{ etc.}$$

Conforme se pode notar, as três expressões de C_k, α, C_{k+1} têm em comum $[a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}]$ e diferem nos termos $\frac{1}{a_k}$, $\frac{1}{\alpha_k}$ e $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$, respetivamente.

É agora possível concluir que α é o limite da sucessão.

Com efeito, por construção,

$$\alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}, \text{ com } \alpha_{k+1} \in \mathbb{R}^+, \text{ donde } \alpha_k > a_k.$$

Mas por outro lado, também

$\alpha_{k+1} = a_{k+1} + \frac{1}{\alpha_{k+2}}$, com $\alpha_{k+2} \in \mathbb{R}^+$ e assim, $\frac{1}{\alpha_{k+1}} < \frac{1}{a_{k+1}}$, pelo que $\alpha_k < a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$.

Obtém-se o enquadramento $a_k < \alpha_k < a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$, que aplicando nos termos referidos anteriormente, resulta,

$$\cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1}}} < \frac{1}{\alpha_k} < \frac{1}{a_k}.$$

Desta forma, conclui-se que, $C_k < \alpha < C_{k+1}$ ou $C_{k+1} < \alpha < C_k$.

Tendo em conta a propriedade, (i) concluímos que o limite das reduzidas é mesmo α. Vale a pena obser- 1
var que um simples cálculo mostra que $C_0 < \alpha < C_1$, pois $C_0 = a_0 < \alpha$, ao mesmo tempo,

$$C_1 = a_0 + \frac{1}{a_i} > a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = \alpha, \text{ com } \alpha_1 \in \mathbb{R}^+.$$

Como as frações reduzidas de ordem par representam sempre um número inferior ao representado pelas de ordem ímpar, conclui-se que $C_{2k} < \alpha < C_{2k+1}$, explicando rigorosamente o seu comportamento estudado nas propostas 4 e 5.

Antes de terminar, gostaríamos apenas de esclarecer o conceito enunciado anteriormente de vantagem de uma aproximação. Diz-se que uma aproximação de um número real por um número fracionário é vantajosa se não for possível melhorar o erro da aproximação sem aumentar consideravelmente o denominador da fração. De facto, para se melhorar o erro da aproximação de π usada por Arquimedes, ter-se-ia de aumentar o denominador da fração para 25.

Repare-se que fixado um número real α, se p e q forem inteiros tais que

$$\alpha \in \left] \frac{p-1}{q}, \frac{p}{q} \right[,$$

então o menor erro ε de uma aproximação de um α por um número fracionário com denominador q vai satisfazer

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2q}.$$

Com efeito, tem-se ou

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{2q} \quad \text{ou} \quad \left|\alpha - \frac{p-1}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}.$$

Contudo, utilizando um enquadramento com duas reduzidas adjacentes da fração contínua associada a α, obtém-se

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \left|\frac{(-1)^k}{q_{k+1}q_k}\right| < \frac{1}{q_k^2},$$

por construção $q_{k+1} > q_k$.

Compreende-se assim que o erro dado pela aproximação de π por $\frac{22}{7}$ seja inferior a $\frac{1}{49}$ e por outra fração de denominador 7 o erro seria apenas inferior a $\frac{1}{14}$.

Proposta 6: Experimente aproximar π pelas frações de denominador 7 e numerador entre 21 e 28. Qual o erro cometido?

As implicações desta teoria nos diferentes domínios da matemática e ciências afins são inúmeras e não param de nos surpreender, ao mesmo tempo a sua relativa simplicidade permite a sua exploração no âmbito dos diversos conteúdos do 3º ciclo e secundário com vantagens para a compreensão das diferentes conexões que podem estabelecer-se entre diferentes objetos matemáticos que os alunos tendem a compartimentar e a separar.

Agradecimentos: Ao professor Alessando Margheri pelas opiniões e correções propostas.

BIBLIOGRAFIA

Barrow, John D., "Chaos in Numberland: The secret life of continued fractions" in *Plus Magazine*, no 11, Maio 2000. *(http://plus.maths.org/content/).*

Beskin, N.M., *Frações Contínuas*, Editora Mir Moscovo, 1980 (Tradução de Pedro Lima, 1987).

Conway, John H. e Guy, Richard K., *O Livro dos Números*, Universidade de Aveiro/Gradiva, 1999.

Devaney, Robert L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

Khinchin, A. Ya., *Continued Fractions*, Dover, 1997.

Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.

Olds, C.D., *Continued Fractions*, Random House, 1963.

Este artigo foi escrito ao abrigo das normas do Novo Acordo Ortográfico.

SOBRE O AUTOR

João Carreira Paixão é professor contratado de Matemática do 3º ciclo do ensino básico e do ensino secundário. Licenciou-se em Ensino da Matemática pela Universidade de Évora e concluiu recentemente o mestrado em Matemática para Professores pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. O presente artigo percorre uma das tarefas apresentadas na dissertação sobre "Frações Contínuas no Ensino Pré-universitário" no âmbito do mestrado sob orientação do Prof. Doutor Pedro J. Freitas.