



# Da Modelação Matemática à Simulação Computacional: Uma Experiência no Âmbito da Formação Contínua de Professores

SUZANA NÁPOLES, MARGARIDA OLIVEIRA,  
DM-FCUL, EB 2,3 PISCINAS  
napoles@ptmat.fc.ul.pt; guidacoliveira@gmail.com

A utilização das tecnologias de informação e comunicação no ensino/aprendizagem, em diferentes níveis de escolaridade, tem vindo a tornar-se uma prática habitual. Conceitos que muitas vezes são apresentados de uma forma estática aos alunos são mais fáceis de apreender quando se utiliza tecnologias adequadas para lhes imprimir maior dinamismo. Mas envolver os alunos na construção de aplicações computacionais com objectivos muito concretos de forma a levá-los a utilizar esses conceitos contribui não só para o esclarecimento dos mesmos, mas também para o desenvolvimento do hábito de pensar e agir de forma organizada.

Este envolvimento é susceptível de promover uma dinâmica inovadora de colaboração entre professores e alunos, em que os primeiros facultam guiões destinados a atingir o resultado desejado e reforçam a cada passo as ideias matemáticas envolvidas, enquanto os segundos têm oportunidade de testar os seus conhecimentos matemáticos num ambiente diferente do habitual, programando as diferentes etapas e sendo recompensados com um produto final a que poderão imprimir um cunho pessoal.

Deverão ser usadas ferramentas tecnológicas de simples utilização e acessíveis na generalidade dos computadores disponíveis nas escolas. Nesta óptica considera-se que as folhas de cálculo têm enormes potencialidades e, quando de-

vidamente exploradas, proporcionam ambientes de aprendizagem muito ricos. A grande vantagem da utilização desta ferramenta tecnológica, em contraponto com outras, porventura com melhores características gráficas, prende-se com a possibilidade do desenvolvimento de aplicações com alguma sofisticação através duma programação simples, o que as torna passíveis de um trabalho conjunto entre alunos e professores. Também o facto de a folha de cálculo não ter ferramentas disponíveis que automatizem os procedimentos torna a sua utilização dependente duma correcta formulação matemática do que se pretende implementar. É possível desenvolver aplicações computacionais de grande interesse para a aprendizagem da matemática recorrendo apenas a algumas funções básicas de uma folha de cálculo, como o Excel. Embora este programa esteja amplamente divulgado nas escolas, é de referir que existe uma versão de acesso livre (OpenOffice.org - Calc) que contém, no geral, as mesmas funcionalidades.

Salienta-se também que o *software* de acesso livre GeoGebra, que reúne geometria, álgebra e cálculo, proporciona uma maior qualidade em termos de visualização gráfica, pelo que a sua utilização se revela vantajosa nalguns casos, apesar da disponibilização de automatismos que diminuem a sua validade enquanto motor para estudar matemática.

O facto de a folha de cálculo Excel não possuir automatismos e permitir usar diferentes tipos de linguagens, tais como a linguagem corrente, numérica e simbólica, e o facto de todos os procedimentos usados ficarem registados na folha e de uma forma visível fazem com que os alunos possam observar as etapas do desenvolvimento da aplicação e receber de uma forma imediata o *feedback* das suas acções. Podem assim ir rectificando os erros cometidos.

No ano lectivo 2008/2009 a Escola Básica EB2,3 Piscinas implementou o projecto *Matemática Dinâmica*<sup>1</sup>. Este projecto, com a duração de três anos e acompanhando um mesmo grupo de alunos ao longo do terceiro ciclo do ensino básico, propõe o desenvolvimento e a utilização de aplicações em Excel, com módulos computacionais em Visual Basic, que permitem estruturar o pensamento matemático e aprofundar os conhecimentos em diferentes temas do currículo nacional da

Da mesma forma que a compreensão de um algoritmo de uma operação é fundamental para a sua utilização, também a compreensão de certos problemas matemáticos só é atingida quando se desenvolve um programa computacional para os analisar.

<sup>1</sup> Este projecto foi distinguido com uma menção honrosa pela Fundação Ilídio Pinho no âmbito do concurso "Ciência na Escola" 7.ª edição, centrado na área da matemática (Tecnologias de Informação e Comunicação).

disciplina de Matemática, privilegiando o desenvolvimento de competências como tomada de decisões, reflexão, resolução de problemas e aplicações.

Procurou-se neste projecto evidenciar conexões entre vários tópicos curriculares de matemática.

Por exemplo, a aplicação a que diz respeito a figura 2 destina-se a trabalhar as coordenadas cartesianas e o conceito de variável. Apresenta o desenho de um comboio, uma tabela de coordenadas cartesianas de alguns pontos de referência do desenho e uma barra de deslocamento que permite efectuar o movimento do comboio. Para simular o movimento horizontal do comboio é necessário alterar as abcissas dos pontos, surgindo a necessidade de utilizar uma expressão algébrica que exprima as abcissas dos “novos” pontos de referência.

As potencialidades dos meios computacionais disponíveis permitem desenvolver trabalhos com os alunos na área das relações entre os vários ramos do saber de uma forma rápida e eficiente. Em particular, as relações entre a matemática e os fenómenos físicos observáveis são aspectos fundamentais para a concretização de uma abordagem que privilegia a vertente laboratorial da matemática, acompanhada pela validação das hipóteses e das técnicas de modelação matemática utilizadas para simular os fenómenos observados.

A simulação virtual do movimento de um projectil lançado na vertical de baixo para cima é exemplo de uma aplicação susceptível de diferentes tipos de utilização.

Desprezando a resistência do ar, um corpo em movimento ascendente, ou em queda livre, está apenas sujeito à acção da força gravítica que a Terra exerce sobre ele. Neste movimento, a aceleração adquirida é constante, a aceleração da gravidade, sendo vertical, com sentido descendente. Durante a subida, um corpo está animado de movimento rectilíneo uniformemente retardado (porque a velocidade e a aceleração são vectores que têm sentidos opostos) e durante a queda está animado de movimento rectilíneo uniformemente acelerado (porque a velocidade e a aceleração são vectores que apontam no mesmo sentido).

Para obter experimentalmente o gráfico que traduz a distância ao solo do projectil (lançado do solo com a velocidade inicial  $v_0 = 49\text{m/s}$ ) pode recorrer-se, por exemplo, a uma sequência de fotografias obtidas de 0,5 s em 0,5 s, dispondo-as lado a lado ao longo de um eixo horizontal, de acordo com uma escala adequada de tempo, como se simula na figura 3.



Figura 1: Matemática Dinâmica  
(<http://www.matematicadinamica.com>).

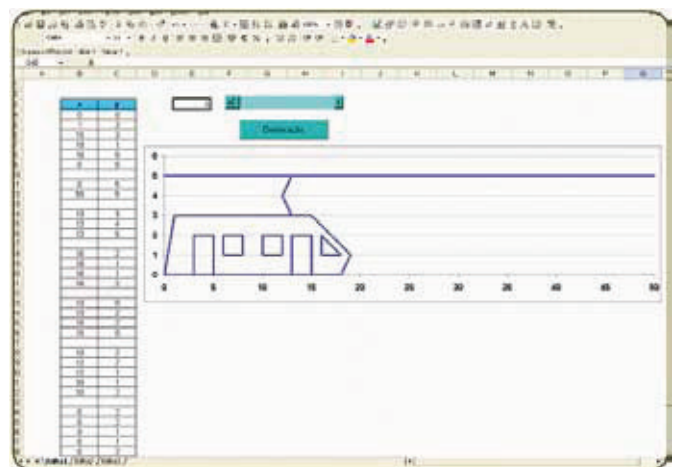


Figura 2: Um comboio em movimento.  
Aplicação desenvolvida pelos alunos do 7.º ano de escolaridade.

Sendo o gráfico de uma função quadrática uma parábola, a simulação virtual deste fenómeno pode ser usada na introdução ao estudo das funções quadráticas no âmbito do 10º ano de escolaridade. Neste caso, os alunos serão utilizadores duma aplicação que podem manipular, individualmente ou com recurso a um quadro interactivo. É pertinente colocar questões como:

1. Escreve a equação que descreve o movimento do projectil quando este é lançado de uma altura de 50 m com uma velocidade inicial de 24 m/s.
2. Estima graficamente qual o instante em que o projectil atinge o solo e confirma analiticamente o resultado obtido.

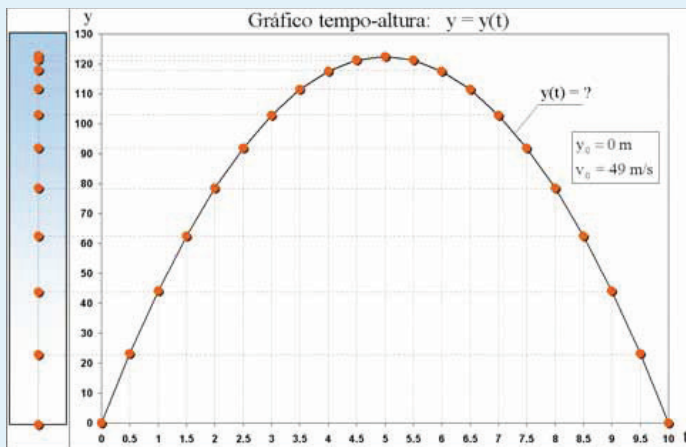
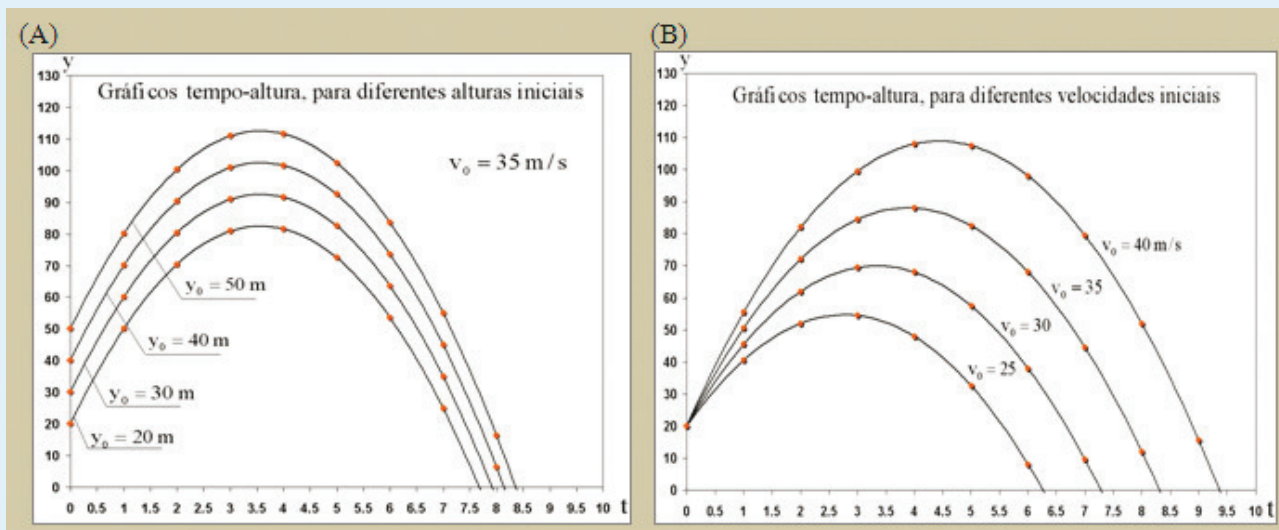


Figura 3: Aplicação que simula o lançamento de um projectil na vertical, de baixo para cima.

A observação dos gráficos A e B sugere que as curvas que melhor se ajustam aos pontos assinalados são partes de parábolas. Mais precisamente, e no caso de o movimento se realizar na Terra, para uma determinada velocidade inicial  $v_0$  e uma determinada altura inicial  $y_0$ , a função que melhor se ajusta às posições fotografadas exprime-se analiticamente por  $y(t) = -1/2gt^2 + v_0t + y_0$  em que  $g = 9,8\text{m/s}^2$  é a aceleração da gravidade terrestre.



3. Ao fim de quanto tempo é que o projectil atinge a altura máxima? Determina esse valor graficamente e confirma-o analiticamente.

Mas, no âmbito do 12º ano, os conhecimentos de matemática, nomeadamente o domínio do conceito de derivada de uma função, associados aos conhecimentos de física, permitem obter a função que modela a distância do projectil ao solo em função do tempo: uma vez que a aceleração é constante, a função que traduz a velocidade em função do tempo é uma função linear, pelo que a função  $y = y(t)$  é uma função quadrática, restando determinar os seus coeficientes tendo em conta as condições do problema.

Esta relação privilegiada entre a física e a matemática foi reforçada com o desenvolvimento do projecto “Tópicos de Física em Experimentação Virtual”<sup>2</sup> ([www.fisicaexpvirtual.com](http://www.fisicaexpvirtual.com)), iniciado no ano lectivo 2009/10 na mesma escola.

Tendo em conta as dificuldades reais na implementação de um ensino experimental da física, este projecto apresenta actividades inseridas num contexto das novas tecnologias, fomentando a experimentação e o sentido de descoberta, dois aspectos essenciais no ensino das ciências experimentais.

<sup>2</sup> Este projecto foi também distinguido pela Fundação Ilídio Pinho no âmbito do concurso “Ciência na Escola” - 8.ª edição “As Artes da Física”.

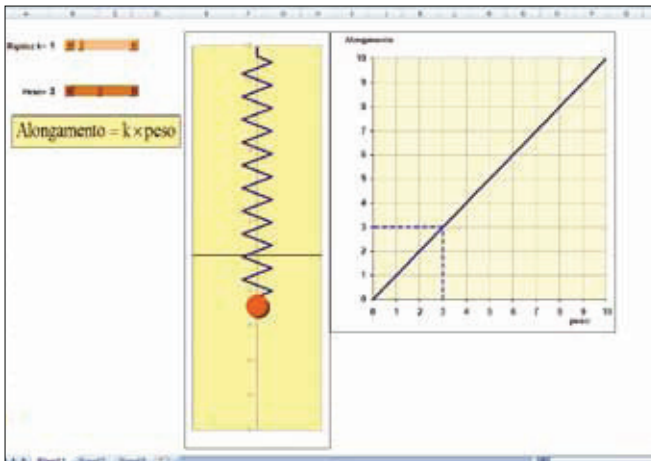


Figura 4: Simulação do alongamento de uma mola. A aplicação foi usada com alunos do 7.º ano de escolaridade acompanhada por uma ficha de trabalho.

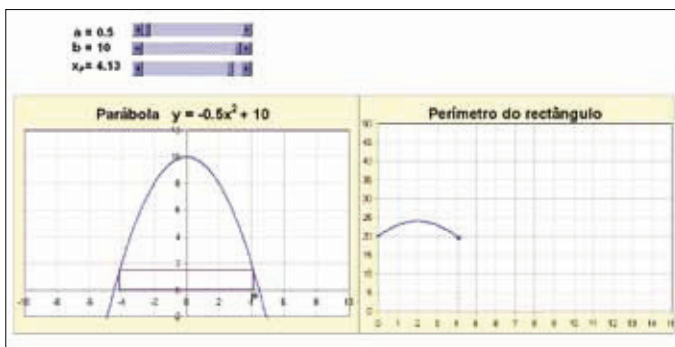


Figura 5: Estudo dos máximos absolutos de funções.

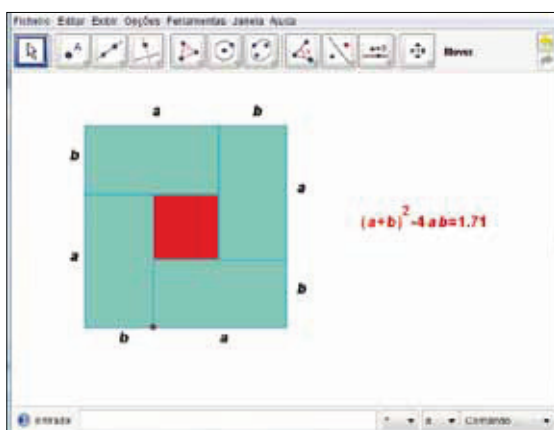


Figura 6: Comparação das médias aritmética e geométrica de números reais não negativos.

A figura 4 diz respeito a uma aplicação realizada em Excel que associa o conceito de proporcionalidade directa à experimentação virtual de um fenómeno: apresenta um esquema representativo de uma mola onde é aplicado um peso, bem como um gráfico que exprime a relação de proporcionalidade directa entre o alongamento de uma mola e o peso aplicado. Esta aplicação dá um significado físico à constante de proporcionalidade que representa, neste caso, a rigidez da mola.

Entre Outubro de 2009 e Março de 2010 o Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa realizou um curso de 40 horas intitulado “Da Modelação Matemática à Simulação Computacional”<sup>3</sup>, dirigido a professores do 3º Ciclo e Secundário com o objectivo de criar adeptos para este processo de interacção entre professores e alunos através desta forma de utilização das tecnologias nos vários níveis de ensino e de contribuir para o desenvolvimento de uma nova forma de olhar a matemática, realçando as suas aplicações e a sua vertente experimental e computacional.

Durante as sessões os formandos foram desafiados a criar instrumentos computacionais, em Excel e/ou GeoGebra, susceptíveis de criar abordagens inovadoras de temas curriculares, com especial destaque para os temas transversais a vários níveis de ensino. Os resultados foram surpreendentes, tanto no que respeita à participação nas sessões como à qualidade da generalidade dos trabalhos produzidos autonomamente.

Com exemplos criteriosamente escolhidos, pretendeu-se mostrar a necessidade de um completo domínio dos conceitos matemáticos envolvidos na construção das aplicações. Por exemplo, um dos problemas ilustrados virtualmente (fig. 5) proporciona o estudo dos máximos absolutos de funções associados a um problema geométrico: determinação das dimensões do rectângulo de perímetro máximo com dois vértices no eixo das abcissas e os outros dois sobre o gráfico de uma função quadrática da família  $f(x) = -ax^2 + b$  com  $a$  e  $b$  números reais positivos e  $a$  diferente de zero. Para a construção é necessário ir resolvendo o problema, respondendo nomeadamente às seguintes questões:

- Qual deverá ser o valor máximo da abscissa do ponto  $P$ ?
- Quais deverão ser as coordenadas dos vértices do rectângulo, tendo em conta a forma como ele é construído?

- Qual é a expressão analítica da função que dá o perímetro do rectângulo em função da abcissa do ponto  $P$ ?

- Como construir o gráfico do perímetro do rectângulo de forma a que seja possível vê-lo aparecer à medida que o ponto  $P$  se desloca?

Este problema estende-se naturalmente ao 11º ano no caso de se pedir as dimensões do rectângulo com área máxima. Neste caso, a função a maximizar é do terceiro grau, pelo há que recorrer à sua derivada para a determinação da abcissa do ponto  $P$  que conduz ao rectângulo pretendido.

No que respeita a situações que pretendam tirar partido de figuras geométricas, a utilização do GeoGebra apresenta vantagens evidentes tendo em conta as ferramentas disponíveis.

Mais uma vez numa perspectiva de inter-relações entre tópicos curriculares, a relação entre as médias aritmética e geométrica de dois números reais não negativos

$$(\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \forall a, b \in \mathbb{R}_0^+)$$

proporciona a construção em GeoGebra de uma aplicação visualmente elucidativa (fig. 6).

Atendendo a que  $a$  e  $b$  são números não negativos, basta verificar que  $4ab \leq (a+b)^2$ , e ter em conta que

- $ab$  é a área de um rectângulo com lados de dimensões  $a$  e  $b$
- $(a+b)^2$  é a área de um quadrado em que a medida do lado é  $a+b$ .

Na sequência desta formação foram realizadas outras acções de 15 horas dirigidas a professores do 1º e do 2º ciclos do Ensino Básico<sup>4</sup>. Nestes níveis de ensino a implementação do uso de módulos interactivos é necessariamente diferente. Com efeito, a limitação de recursos matemáticos que os alunos então possuem torna-os essencialmente utilizadores de *applets* previamente construídos, desejavelmente pelos respectivos professores.

A folha de cálculo constitui uma ferramenta muito adequada para experimentar, explorar e exercitar o cálculo mental. Estas características propiciam a sua utilização para o desenvolvimento de pequenos módulos computacionais que constituam um apoio efectivo ao estudo das propriedades de números. Podem construir-se desafios muito elementares, como o representado na figura 7, trabalhando apenas adições e subtracções com números inteiros



Figura 7: Desafio numérico.

não negativos para utilização no primeiro ano de escolaridade. Acreditamos que estes módulos destinados a trabalhar o cálculo mental têm grandes vantagens em contraponto com a realização de exercícios com carácter repetitivo que constam da generalidade dos manuais. Com efeito, a confrontação imediata com a justeza do resultado e a capacidade de gerar aleatoriamente novas situações cria uma empatia com a repetição que não está presente na generalidade dos alunos quando se trata de resolver exercícios de um manual.

<sup>3</sup> Foram formadores desta acção Margarida Oliveira, da Escola Básica EB 2,3 Piscinas, e Pedro Miguel Duarte e Suzana Nápoles, ambos docentes do Departamento de Matemática da FCUL.

<sup>4</sup> Acções de formação promovidas pelo Departamento de Matemática da FCUL em colaboração com a Lisboa Editora. Foram formadores destas acções Margarida Oliveira (EB 2,3 Piscinas) e Suzana Nápoles (DM-FCUL).

A programação deste desafio<sup>5</sup> constitui uma boa ocasião para os professores reverem os algoritmos das operações elementares e construir novos desafios, envolvendo, por exemplo, as quatro operações elementares em diferentes universos de números, a ordenação de números, a decomposição de um número em factores primos, a determinação do máximo divisor comum ou do menor múltiplo comum de dois ou mais números naturais.

Este tipo de aplicação permite adaptações a vários anos de escolaridade e despertou muito interesse junto dos formandos, que criaram autonomamente variações muito interessantes<sup>6</sup>.

Também o GeoGebra proporciona a construção de módulos destinados a trabalhar as propriedades dos números tirando partido de aspectos figurativos.

A aplicação a que respeita a figura 8 destina-se a apoiar o estudo das fracções, facilitando as várias representações, usando apenas dois cursores para fazer variar os valores do denominador e do numerador da fracção.

## EM CONCLUSÃO

O envolvimento e o entusiasmo dos alunos quando confrontados com a construção e a utilização de aplicações levam-nos a reforçar a ideia de que este tipo de módulos interactivos, construídos com *software* disponível na generalidade dos PCs, pode ter um papel importante na compreensão dos conceitos matemáticos e na resolução de problemas. Pode também contribuir para a formulação de conjecturas e para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Com a ajuda das aplicações torna-se simples testar diferentes casos, o que permite formular questões que levam a percorrer o caminho da descoberta e evidenciam a importância das demonstrações.

O interesse despertado por estas acções de formação e a adesão dos participantes às actividades desenvolvidas, manifestada tanto ao longo das sessões como na fase da avaliação da acção (com a concepção de traba-

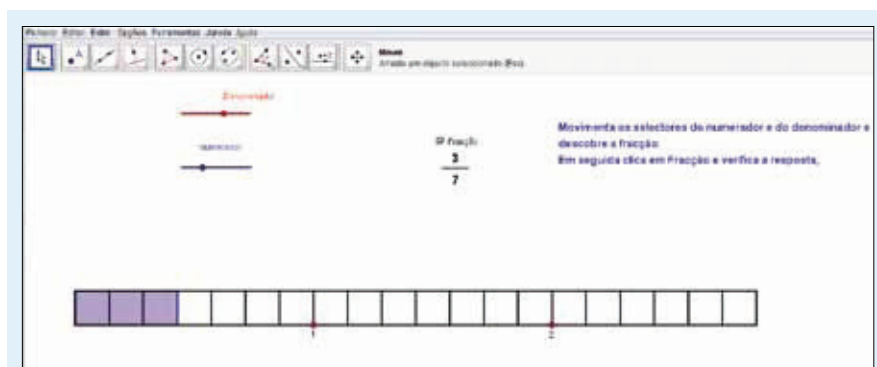


Figura 8: Representação de fracções.

lhos e a sua posterior apresentação), leva-nos a acreditar que esta aposta na ligação da modelação matemática à simulação computacional pode, de facto, criar dinâmicas diferentes na sala de aula que conduzam ao desenvolvimento de uma nova forma de olhar a matemática.

<sup>5</sup> Para o funcionamento desta aplicação há que programar o botão gerador de novo *puzzle* (assinalado com <>) e o botão para conferir o resultado (assinalado com “verificar”). Relativamente ao primeiro, há que ter especial cuidado na escolha dos elementos possíveis nas linhas 8 e 11 de forma a que o número satisfazendo as igualdades escolhidas aleatoriamente não seja negativo. No caso da linha 8, e uma vez escolhidos os valores que ocupam a casa vermelha, por exemplo de 1 a 10, os valores da casa laranja não poderão ser inferiores a 10.

<sup>6</sup> É interessante salientar que vários professores presentes na acção testemunharam o êxito obtido com o trabalho realizado com estas aplicações na sala de aula utilizando o computador Magalhães (que inclui o Microsoft Office e onde instalaram o software do GeoGebra) e que, até à data, praticamente não tinha sido utilizado no ensino/aprendizagem da matemática nos 1º e 2º ciclos de ensino.

### SOBRE AS AUTORAS

**Suzana Metello de Nápoles** é doutorada em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e é professora do Departamento de Matemática desta faculdade. Nessa qualidade tem colaborado na orientação de mestrados ligados ao ensino da matemática e em acções de formação contínua para professores dos ensinos básico e secundário. Dedicou-se actualmente a actividades na área da comunicação e divulgação da matemática, sendo co-autora de obras publicadas nas áreas de ensino e de divulgação científica desta ciência.

**Margarida Cristina Pereira da Silva Oliveira** é mestre em Matemática para o ensino pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e é professora de Matemática do ensino básico e secundário. Nessa qualidade tem colaborado em acções de formação contínua para professores de diferentes níveis de ensino. Encontra-se actualmente a desenvolver o doutoramento em Modelação Matemática e Simulação Computacional.