Um Caso de Geometria Agrária

Claudio Arconcher
Jundiaí - SP (Brasil)

Civilizações muito antigas como a Egípcia, a Babilónica, a Chinesa e a Indiana defrontaram-se nos seus primórdios com a necessidade de determinar a área de uma gleba produtiva e de conhecer o volume de um celeiro onde guardavam cereais como a cevada e o trigo. Citemos dois exemplos clássicos:

Exemplo 1: Babilónios, Egípcios e Chineses avaliavam a área de uma gleba em forma de quadrilátero convexo tomando o produto das médias aritméticas dos lados opostos do quadrilátero. Assim, se *a, b, c* e *d* são, ciclicamente, as medidas dos lados de um quadrilátero convexo, a área era dada por $\frac{a+c}{2}.\frac{b+d}{2}$.

Nenhuma informação era dada sobre o facto de que essa avaliação, em geral, conduz a uma sobre-estimação do valor real da área [1], [2].

Exemplo 2: Em *O que aconteceu na História,* de Gordon Childe [3], no capítulo V intitulado *A revolução urbana da Mesopotâmia,* podemos ler sobre o conhecimento dos agricultores da antiga Suméria, pequena região sobre o delta do Tigre e do Eufrates: "... documentos datados de 2.500 a.C. indicam que o rendimento médio de um campo de cevada equivalia a oitenta e seis vezes a semeadura."

Além de conhecermos a excepcional produtividade da região naquela época, constatamos também que os sumérios sabiam avaliar volumes.

O volume de um tronco de pirâmide de base quadrada já era do conhecimento dos egípcios há 4.000 anos. É o problema número 14 descrito no documento conhecido por Papiro de Moscou [1]. É curioso notar que o volume de um tronco de pirâmide foi conhecido muito antes do volume da própria pirâmide.

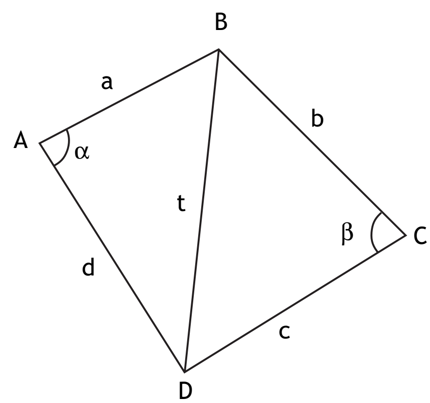
Num livro recente *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o séc. XXI* [4] dos autores Romulo Campos Lins e Joaquim Gimenez podemos ler que, em nosso país, agricultores do Movimento Sem-Terra avaliam a área de uma gleba quadrangular elevando ao quadrado a média aritmética das medidas dos lados do quadrilátero. Também aqui, conforme veremos, temos uma sobre-estimação da área.

Nossa curiosidade sobre esse caso começou quando consideramos as possíveis implicações que essa avaliação poderia ter. Não é difícil imaginar, levando-se em conta os insumos da produção agrícola, quão fundamental deve ser uma boa avaliação da área de uma gleba para a optimização da produção, mesmo que pensemos em pequena escala.

No que segue vamos procurar entender melhor essas avaliações. Notemos, desde já, que a fórmula usada pelos antigos é certa se o quadrilátero for um rectângulo e a fórmula usada pelos Sem-Terra é certa para um quadrado.

Consideremos um quadrilátero convexo cujos lados medem, ciclicamente, *a, b, c* e *d*. É claro que um quadrilátero convexo não fica determinado apenas pelas medidas de seus lados. Para defini-lo precisamos conhecer, além dos lados, a medida de um dos ângulos internos ou a medida de uma de suas diagonais.

Vejamos, primeiramente, a questão da sobre-estimação da área. Seja **ABCD** um quadrilátero convexo:



α e ß são as medidas dos ângulos opostos **BÂD** e **BĈD**, respectivamente, e t é a medida da diagonal **BD**.

A área do quadrilátero **ABCD** é dada por:

$$A = \frac{1}{2}\, a.d.\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}\, b.c.\operatorname{sen}\beta.$$

Vamos multiplicar essa expressão, membro a membro, por 4 e elevar ao quadrado ambos os termos da igualdade (a seguir ficará justificado esse procedimento).

$$16A^2 = 4a^2d^2\operatorname{sen}^2\alpha + 4b^2c^2\operatorname{sen}^2\beta + 8abcd\ \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta \qquad (1)$$

O teorema dos cosenos aplicado aos triângulos ABD e BCD nos fornece:

$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\beta$, daqui temos

$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad\cos\alpha - 2bc\cos\beta$, elevando ao quadrado os dois termos:

$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2d^2\cos^2\alpha + 4b^2c^2\cos^2\beta - 8abcd\ \cos\alpha.\cos\beta \qquad (2)$$

Somando membro a membro (1) e (2) vem:

$16A^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 8abcd\cos(\alpha + \beta)$, ou

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2d^2 + 4b^2c^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd\cos(\alpha + \beta)} \qquad (3)$$

fórmula essa que explicita a dependência da área com as medidas dos lados do quadrilátero e com os ângulos opostos α e β. Fica claro que o valor máximo para a área ocorre quando $\alpha + \beta = 180°$, isto é, quando o quadrilátero é inscritível numa circunferência. Nesse caso, pondo-se $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ e com mais trabalho algébrico obtemos a expressão $A_{máx} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, a qual é a famosa fórmula devida ao matemático indiano do século VII d.C. Brahmagupta [5].

Com esse resultado estamos em condições de provar nossas afirmações anteriores.

(1) Vamos provar que: $A \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$.

De facto, podemos escrever:

$$A_{máx} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$= \sqrt{(p-a)(p-c)} \cdot \sqrt{(p-b)(p-d)}$$

$$\leq \frac{(p-a)+(p-c)}{2} \cdot \frac{(p-b)+(p-d)}{2}$$

$$= \frac{b+d}{2} \cdot \frac{a+c}{2}$$

$$= \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

Como $\mathbf{A} \leq \mathbf{A}_{\mathbf{máx}}$, está provado o pretendido.

Teremos igualdade se, e somente se, $p-a = p-c$ e $p-b = p-d$ ou seja $a = c$ e $b = d$, isto é, para um rectângulo, já que deve ser um paralelogramo inscrito. Além disso fica estabelecido que o rectângulo é o único quadrilátero convexo cuja área é dada pelo produto das médias aritméticas dos lados opostos. Em todos os outros casos temos uma sobre-estimação da área.

(2) Vamos provar agora que $A \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$.

Podemos escrever:

$$\sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$\leq \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)}{4}$$

elevando ao quadrado membro a membro resulta:

$$A_{máx} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2.$$

Está provado.

Teremos igualdade se, e somente se, $p-a=p-b=p-c=p-d$ ou $a=b=c=d$, ou seja, um quadrilátero inscritível com os quatro lados congruentes, isto é, um quadrado.

A esta altura é interessante indagar qual das duas sobre-estimações é mais próxima do valor real da área. Veremos que a avaliação dos povos antigos é mais precisa.

De facto estudemos a diferença entre elas:

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 - \frac{(a+c)}{2} \cdot \frac{(b+d)}{2}.$$

Poupando o leitor de acompanhar o desenvolvimento algébrico, essa diferença é igual a:

$$\frac{[(a+c)-(b+d)]^2}{16}.$$

Denotando a primeira parcela por $A_{\text{sem-terra}}$ e a segunda por $A_{\text{egípcios}}$ podemos escrever:

$$A_{sem-terra} - A_{egípcios} = \frac{[(a+c)-(b+d)]^2}{16} \geq 0,$$

ocorrendo igualdade se, e somente se, a + c = b + d. Muito curioso. Para um quadrilátero circunscrito as duas sobre-estimações coincidem.

Vejamos num exemplo os resultados da sobre-estimação dada pela fórmula usada pelos Sem-Terra. Consideremos uma gleba quadrangular de dimensões: 300m, 400m, 500m e 600 m, ciclicamente. Aplicando a fórmula $A_{\text{sem-terra}}$ obtemos para a área da gleba o valor 202.500m^2. A área máxima dada pela fórmula de Brahmagupta é 189.736,65m^2. Assim a diferença entre o valor máximo possível e a sobre-estimação é 12.763,35m^2.

Admitindo que as dimensões da gleba do exemplo são pertinentes para um grupo de pequenos agricultores, nos parece que o resultado da sobre-estimação é inadmissível. Na prática isso traria problemas económicos bastante relevantes. Primeiro o sobre-dimensionamento dos insumos gerando eventuais desperdícios. Em segundo lugar teríamos uma falsa previsão da produção também por sobre-estimação. A situação se agrava ainda mais se considerarmos que, na maioria das vezes, a produção agrícola é financiada em Bancos que cobram juros de seus empréstimos.

Chegamos assim a um impasse interessante gerado por uma simples fórmula matemática para a área de um quadrilátero.

Conjecturar como esse impasse é resolvido na prática não nos parece a melhor orientação a seguir. O melhor a fazer é planear uma pesquisa de campo mais abrangente junto aos Sem-Terra e procurar entender em detalhe todo o processo produtivo, desde o planeamento inicial onde a referida fórmula de área deve ser usada até o resultado final com a comercialização dos produtos agrícolas.

Nosso propósito presente é apenas levantar a impropriedade dessa forma de calcular a área de uma gleba. Aliás impropriedade essa com profundas raízes históricas. Babilónios, Egípcios e Chineses calculavam a área de qualquer quadrilátero como se fosse um rectângulo. Os Sem-Terra de nossos dias calculam como se fosse um quadrado.

Bibliografia:

[1] *História da Matemática*
Carl B. Boyer; Editora Edgard Blücher Ltda.(1974).

[2] *A History of Chinese Mathematics*
Jean - Claude Martzloff, Spring-Verlag (1997).

[3] *O que aconteceu na História*
Gordon Childe, Círculo do Livro.

[4] *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*
Romulo Campos Lins e Joaquim Gimenez,
Editora Papirus, 3ª Edição.

[5] *Geometry Revisited*
H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer,
The Mathematical Association of America (1967).

Bartoon

Luís Afonso, *"Bartoon 2"*, Contexto Editora, 2000
(Publicação gentilmente autorizada pelo autor)