



BERNARDO MOTA
Universidade de Lisboa
bernardomota@campus.ul.pt

APOLÓNIO E OS ELEMENTOS DE EUCLIDES - 2.^a PARTE

Os académicos são unânimes em considerar a contribuição de Apolónio de Perga no domínio da geometria elementar pouco relevante. Chegou o momento de rever esta doutrina e mostrar que, por detrás de algumas certezas, o estudo da matemática antiga está cheio de incertezas.

Quando os estudiosos defendem que as alternativas de Apolónio ao texto dos *Elementos* são inferiores às soluções de Euclides, assumem (a) que o texto do primeiro livro dos *Elementos* que circulava no tempo de Apolónio é aquele que hoje conhecemos, mais coisa menos coisa; (b) que Apolónio toma essa suposta compilação referencial como ponto de partida para as suas reflexões; (c) e que Proclo está a ser historicamente exacto. Poucas vezes se pronunciaram contra este dogma e as que o fizeram foram tímidas na sua reivindicação e ferozmente refutadas, acabando por cair no esquecimento (assim, por exemplo, Paul Tannery, que defendeu que as noções comuns do prefácio de *Elementos* 1 foram introduzidas por Apolónio).

Começemos pela última assunção. Proclo viveu no século V, quase 800 anos depois de Euclides e 700 anos depois de Apolónio. Ou seja, se Proclo vivesse agora, estaria a tentar explicar a história da matemática do tempo das Cruzadas, aí por volta do ano 1200. Ou seja, Proclo mais provavelmente está a reconstituir do que a transmitir um retrato fiel de uma etapa na elaboração dos elementos de geometria. Acresce que Proclo dificilmente possui o texto original de Apolónio, mas toma

as suas informações de fontes secundárias, como é habitual, de resto, no seu comentário. E assim temos uma dúvida razoável quanto ao último ponto. O que altera a nossa perspectiva do segundo ponto. Uma vez que Proclo assume que Apolónio está a comentar a versão dos *Elementos* de que dispomos, é natural que se sinta livre para interpretar a informação disponível de acordo com este dado. Neste sentido, Proclo pode estar a submeter inconscientemente as demonstrações de Apolónio à estrutura rígida que encontra nas provas euclidianas e ao quadro mais amplo da ordenação proposicional dos *Elementos* que chegaram até nós, deturpando a sua intenção original. Por outro lado, é intrigante que um matemático reconhecidamente capaz e competente como Apolónio tivesse decidido percorrer o livro primeiro dos *Elementos*, mas acabasse por se dar ao trabalho de registar apenas umas poucas notas supérfluas e marcadas pela trivialidade. Lidar com o primeiro livro dos *Elementos* implica manobrar as ferramentas da geometria elementar com especial brilhantismo e ter em consideração restrições matemáticas e filosóficas particularmente severas a que Apolónio não podia deixar de estar atento. É lícito pensar, nestas circunstâncias, que o significado das provas de

Apolónio não se encontra bem determinado e que a relação do seu contributo com a tradição dos *Elementos* de Euclides que conhecemos não está clara. O que nos leva ao primeiro ponto. É preciso lembrar que lidamos com um texto cujo carácter compilatório faz com que seja tentador incluir novas passagens e transformar as já existentes, de forma a responder a novos desenvolvimentos na história das ideias e da própria matemática. Não é fácil determinar quando é que o texto final ficou estabelecido; mas não é de todo descabido pensar que a constituição do texto dos *Elementos* de Euclides foi demorada e cruzou diversas tradições, num processo que pode ter camuflado a estrutura original.

Podemos vislumbrar o tipo de transformação que um texto de matemática pode ter sofrido na Antiguidade se tomarmos em atenção uma passagem justamente famosa, incluída por Hípsicles no prefácio do 14º livro dos *Elementos*, que ele próprio acrescentou aos 13 primeiros habitualmente atribuídos a Euclides. O passo é sobre as alterações sofridas por um tratado... de Apolónio:

“Quando Basílides de Tiro veio para Alexandria e se encontrou com o meu pai, Protarco passou a maior parte do tempo com ele devido ao elo que os unia, derivado do seu interesse comum na matemática. Ora, em dada altura, ao examinarem o tratado de Apolónio [...] chegaram à conclusão de que o tratamento de Apolónio [...] não estava correcto; então, como depreendi da narrativa do meu pai, puseram-se a corrigi-lo e a reescrevê-lo. Mas eu próprio, mais tarde, encontrei um outro livro publicado por Apolónio e que continha uma demonstração do assunto em questão, e interessei-me sobremaneira pelo seu tratamento do problema. Ora, o livro publicado por Apolónio está acessível a todos; pois tem larga difusão numa forma que parece ter sido o resultado de uma cuidada elaboração posterior. Da minha parte, decidi dedicar-te o que julguei necessário sob a forma de comentário...”

A passagem indica duas regras que presidiam à transmissão de textos matemáticos na Antiguidade. Em primeiro lugar, eram alterados, emendados, corrigidos e elaborados no decurso da sua transmissão; neste processo, dois tipos de erros eram constantemente corrigidos: os do próprio autor e os resultantes de corrupção (um dos problemas da transmissão manuscrita). Em segundo lugar, os textos mantinham a sua autoria original e muito do trabalho posterior de edição acabava por permanecer anónimo; assim sendo, mesmo na Anti-

guidade os académicos acabavam por não conseguir distinguir quanto do trabalho que consultavam seria realmente autêntico, embora nunca duvidassem da autoria original. Mais ainda: podia circular uma variedade de tratados do mesmo autor com tratamentos diversos do mesmo assunto.

Ora, não há razão nenhuma para o texto dos *Elementos* não ter passado pelo mesmo processo. Talvez seja a altura ideal para lembrar que os manuscritos mais antigos dos *Elementos* datam dos séculos IX e X e que os poucos fragmentos de papiro que incluem trechos aparentados com passagens dos *Elementos* apresentam variações importantes em relação ao texto que temos (além de serem, eles também, bastante posteriores em relação à data em que viveu Euclides). Mesmo na Antiguidade, e antes de Proclo, o texto dos *Elementos* sofreu vários processos editoriais, sendo talvez o mais relevante aquele que foi empreendido por Teão de Alexandria, no século IV.

Baralhando novamente as cartas e voltando a dá-las, o que é que resulta? Resulta que Apolónio pode ter trabalhado sobre uma tradição dos *Elementos* diferente daquela que chegou até nós e que atribuímos a Euclides. Ou ainda, que pode ter trabalhado numa altura em que os *Elementos* de Euclides ainda não tinham ganho o estatuto de obra de referência que acabaram por obter. Seja qual for a hipótese alternativa que considerarmos, o importante é fazer pesquisa assumindo que Apolónio é uma testemunha fundamental do *state of the art* da geometria elementar do seu tempo.

Um exemplo: e se Apolónio oferecer o retrato dos *Elementos* anterior à versão de que dispomos? Nesse caso, a proposição que ensina a construir um triângulo equilátero não teria de merecer uma demonstração isolada nem teria de ocupar o lugar que ocupa hoje e que é nem mais nem menos do que a primeira posição no livro 1. Antes pertenceria à parte da construção da prova onde se mostra como bissectar uma linha (aliás, o leitor ficará surpreendido ao saber que o primeiro autor a referir a construção do triângulo equilátero como primeira proposição dos *Elementos* é Alexandre de Afrodísias, que escreveu cerca do século II d.C.). O que implica que *Elementos* 1.2 (que depende de *Elementos* 1.1) não estaria no manual de geometria elementar de referência no tempo de Apolónio, ou, pelo menos, na posição em que a temos hoje. E assim por diante.

A hipótese pode estar completamente errada. Quando aplicada, pode mesmo ganhar uma complexidade inesperada; quem é que nos diz que as provas atribuídas por Pro-

clo a Apolônio não foram, elas próprias, alteradas no decurso da sua transmissão? No entanto, apesar de termos de ser cautelosos, este é um ponto de partida excitante. Repare-se na mudança de perspectiva que opera. Hoje assume-se que os argumentos geométricos mais sofisticados dos *Elementos* pertencem a Euclides e que os mais toscos pertencem a autores posteriores (ou) muito menos brilhantes. Ora, e se a sofisticação toda que se encontra nos *Elementos* resultar, pelo contrário, de um longo processo de melhoramento do texto, da matemática e dos princípios de filosofia envolvidos? Tentar uma doutrina diferente, mesmo que a título experimental, pode muito bem ser a única maneira de ultrapassarmos a linha do horizonte estabelecida por sucessivas reedições do texto euclidiano que obscureceram a sua etapa inicial e o seu processo de desenvolvimento.

Agradecimentos: Como habitualmente, a Henrique Leitão, pela leitura do rascunho do artigo (que, neste caso, acabou desdobrado em dois); e a André Mota, pelo desenho das figuras (que ficaram confinadas à primeira parte).

REFERÊNCIAS

Proclo escreveu originalmente em língua grega, mas o seu comentário a Euclides encontra-se disponível em tradução inglesa, francesa, italiana (e, para quem preferir, latina); em português é que não se encontra. Deixo a indicação completa da tradução inglesa, para o leitor que quiser espreitar esta fonte fundamental para o estudo da matemática antiga (aí são referidas as outras traduções existentes):

Morrow, Glenn (1992). *Proclus. A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton University Press.



LOJA
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em www.spm.pt