ATRACTOR

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site *www.atractor.pt* .
Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

RECUPERAÇÃO MATEMÁTICA DO PATRIMÓNIO

Há alguns anos foi tirada uma fotografia a um painel de azulejos existente na Igreja de S. Domingos, em Viana do Castelo, para ilustrar uma palestra sobre os grupos de simetria de padrões duplamente periódicos no plano. Qual não foi o espanto, quando, ao tentar classificar o que se julgava ser uma região representativa de um tal padrão, se verificou que não se encontrava a esperada regularidade na colocação dos azulejos.

Uma imagem dessa fotografia está na figura 1. Note-se que, logo no início da primeira linha, surgem as duas configurações indicadas na figura 2. Há no painel dois tipos de azulejos diferentes, *A* e *B*, representados na figura 3 e é essa diversidade que permite que haja uma grande variedade de configurações, que numa primeira análise podem não ser detetadas.

Suponhamos que temos dois eixos, um horizontal e outro vertical, e queremos colocar quatro azulejos, um em cada quadrante, de forma a que cada um desses azulejos, de tipo *A* ou *B*, encoste à origem o seu vértice que, na figura 3, aparece à esquerda, em baixo. Por exemplo, começando no 1.º quadrante e correndo os restantes no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, as configurações mostradas na figura 2 correspondem às escolhas dos azulejos *BAAA* e *ABAB*, respetivamente.

Figura 1: Painel de Azulejos

Figura 2

Figura 3: *A* e *B*

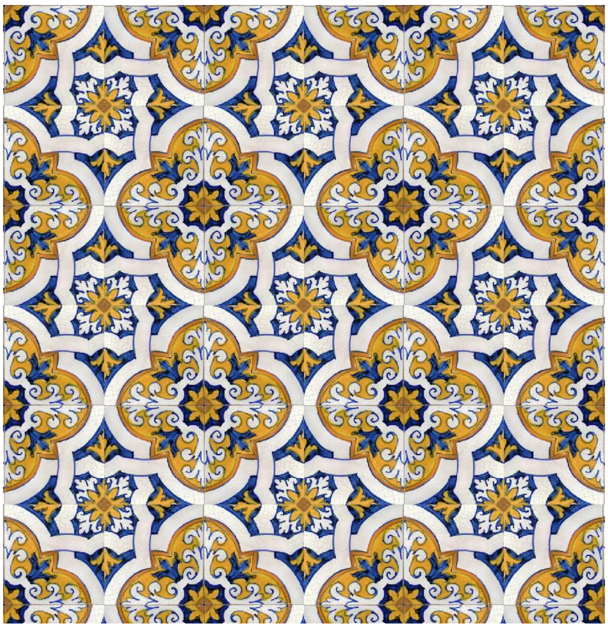
A	B	B	A	B	A	A	A	A	A
A	A	A	B	A	A	A	A	A	B
B	B	A	B	A	A	B	A	A	B
A	A	A	A	A	A	A	A	B	A
B	A	B	A	A	B	A	A	A	B
B	A	A	B	A	A	A	A	B	A
A	A	A	A	A	B	A	B	A	A
A	B	B	A	A	A	A	B	A	A

V	V	H	H	H	H	V	H	V	H
H	V	H	H	H	V	H	V	H	H
H	V	V	V	V	H	H	H	V	V
H	V	H	V	H	V	H	V	V	V
H	H	H	H	V	V	V	H	V	V
V	V	H	H	H	V	H	V	V	V
V	H	V	H	V	V	V	V	V	H
H	H	V	V	H	V	H	H	H	V

Figura 4

Figura 5 ▶

Figura 6 ▼
Padrão usando só azulejo *A*: *AAAA* (442 ou *p*4)



As possibilidades são em número de 16 (palavras em *A* e *B* de quatro letras) e, destas, 10 estão representadas no painel (ver figura 4[1]), o que não abona muito a favor do modo como se procedeu à colocação dos azulejos!

Seria difícil proceder à retificação do verdadeiro painel da parede da igreja, mas o Atractor apresenta aqui um exercício, que consiste em mostrar como se poderia utilizar o seu programa GeCla [1] para proceder a um *restauro virtual* do painel. Esse exercício servirá de pretexto para destacar a relação entre subgrupos do grupo de simetria e regiões fundamentais (motivos) que lhes estão associadas.

Comecemos por fixar, entre as dez configurações representadas no painel, uma que só utiliza um dos dois tipos de azulejos: *AAAA* (1.ª linha, 4.ª coluna). E imaginemos que o painel se obtém a partir da imagem quadrada (figura 5) assim criada com os quatro azulejos iguais, efetuando sucessivas translações horizontais e verticais do quadrado. Cada bordo é colado por uma pequena translação ao seu bordo paralelo. Ora, colando entre si bordos paralelos de um quadrado, obtém-se um toro e, usando esse toro como *carimbo*, o GeCla permite obter o padrão desejado. Esse padrão está representado na figura 6. Este seria porventura o melhor candidato a padrão para usar num restauro do painel da igreja, com aquele tipo de azulejos. Usando agora o mesmo procedimento, mas partindo da configuração inicial *BAAA* (1.ª linha e 1.ª coluna, ver 1.ª imagem da figura 2), chegaríamos ao padrão representado na figura 7. Há uma diferença importante, do ponto de vista do tipo de simetria, entre os padrões representados nas figuras 6 e 7. As únicas simetrias do segundo são as translações. No primeiro caso há, além destas, simetrias de rotação de graus 2 e 4, com centros nos chamados

◀ Figura 7: *BAAA* (o ou *p*1)

▼ Figura 8: Centros de ordem 2 e 4

centros de giração[2], assinalados na figura 8 respetivamente com os símbolos ◊ e ⌑. De onde é que surgiram estas simetrias adicionais no primeiro caso, se só usámos translações em ambos os casos? Uma simples análise das figuras permite encontrar a resposta: o desenho no quadrado de quatro azulejos usado no primeiro padrão tinha, ele mesmo, uma simetria de rotação de grau 4 com centro no próprio centro do quadrado. Isso implicou que o padrão tivesse como simetrias, não só as rotações de grau 4 com centros em todos os transladados, mas também outras rotações resultantes da existência daquelas e das translações (ver figura 8).

No segundo exemplo, o quadrado escolhido corresponde a uma região fundamental do seu grupo de simetria – que coincide neste exemplo com o das translações do padrão – e esse quadrado pode ser escolhido como motivo básico para o padrão correspondente. Mas no primeiro exemplo, o quadrado que usámos não é uma região fundamental para o grupo de simetria do padrão da figura 6, é-o apenas para o subgrupo (próprio) do grupo das translações do padrão. Portanto, não pode ser escolhido como um motivo para o padrão, pois aquele quadrado *não* é uma região *minimal* tal que a partir dela se possa reconstruir todo o padrão usando apenas isometrias pertencentes ao grupo de simetria. (Na frase anterior, a seguir a "pois", poder-se-ia tirar ambas as palavras em itálico, mas não só uma delas. Porquê?) Para encontrarmos um motivo, vamos procurar uma região mais pequena, uma vez que, além das translações, dispomos de outras simetrias. Não há unicidade na escolha: na figura 9 estão indicadas três escolhas, entre uma infinidade de formas possíveis. As cores nos bordos indicam quais os pontos que se correspondem por alguma das simetrias (a rotação referida, uma translação ou uma composta da rotação com translações). Procedendo às colagens dos bordos, pela forma sugerida por essas cores, obtemos nos três casos um duplo triângulo retângulo isósceles.

[1] Nessa figura, está, para cada conjunto de 4 azulejos, também a palavra em *H* e *V*, que descreve, para cada quadrante e junto à origem, se é a curva horizontal ou a vertical que está por cima. Configurações idênticas têm a mesma cor de fundo para mais fácil identificação e contagem.

[2] J. Conway usa esta terminologia para aludir a centros de rotação que não estão situados em eixos de simetria (de reflexão).

Figura 9: Regiões fundamentais de formas diferentes (442 ou *p*4)

Figura 10: Formação da almofada triangular (triângulo retângulo isósceles – *p*4 ou 442)

Figura 11: *ABAB* e *BABA*

Figura 12: Padrão correspondente a *BABA* (*2222 ou *pmm*)

Essa "almofada triangular" é característica desse tipo de simetria, designado por *p*4 ou 442, conforme o sistema de notações, e pode ser utilizada como uma espécie de carimbo para obter todo o padrão (ver [1]). A figura 10 mostra diversas fases na formação do carimbo referido.

Os casos *BAAA* e *AAAA*, que acabámos de ver, aparecem quatro vezes cada no painel da igreja. Vejamos o que sucede com os outros 12 desenhos. *ABAA, AAAB* (duas vezes cada), e *AABA* (uma vez) correspondem a três desenhos diferentes, todos sem simetria, que conduzem a padrões só com translações, tal como em *BAAA*. As configurações *ABAB* e *BABA* (duas vezes, cada) têm dois eixos de simetria em direções perpendiculares, um vertical e outro horizontal: regiões fundamentais são, aqui, de forma perfeitamente determinada. A figura 11 mostra o desenho dos quatro azulejos e o carimbo correspondente, formado por um azulejo com bordo espelhado. A figura 12 mostra o padrão correspondente a *BABA*. As configurações *ABBA* e *BAAB* (para *BAAB*, ver figuras 13 e 14) têm dois desenhos diferentes, mas com o mesmo tipo de simetria: um eixo vertical de simetria, que traz como consequência que os bordos do quadrado que lhe são paralelos também sejam eixos de simetria; uma região fundamental é um dos dois retângulos em que o eixo divide o quadrado. Nesse retângulo, os lados verticais são espelhados e os horizontais devem ser colados (por uma translação), dando origem a um carimbo, que é um cilindro com os bordos espelhados. A figura 15 mostra algumas fases na formação do cilindro (com bordos espelhados, que "carimbam" os eixos de simetria do padrão).

Quanto à configuração *BBAA*, tem também apenas um eixo de simetria, mas horizontal.

Em resumo: nos 20 quadrados de quatro azulejos (figuras 1 e 4), temos 10 palavras diferentes, mas estas 10 palavras só definem, aplicando o método indicado, padrões com quatro tipos diferentes de simetria. E as seis palavras que faltam na parede? São elas *AABB, ABBB, BABB, BBAB, BBBA, BBBB*. Deixa-se ao leitor como exercício a verificação de que todas elas determinam, pelo processo indicado, padrões de três dos quatro tipos de simetria já encontrados.

O exercício de restauro poderia continuar, se variássemos as regras que impusemos no início...

Figura 13: *BAAB*

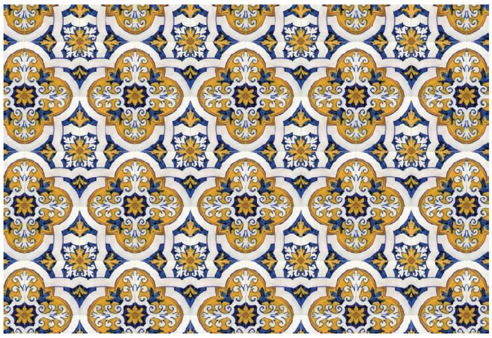


Figura 14: *BAAB* (** ou *pm*)

REFERÊNCIAS

[1] GeCla[3], pode ser importado de *http://www.atractor.pt/mat/GeCla*

[3] O programa GeCla guarda, além do padrão gerado, a informação sobre as simetrias criadas pelo carimbo utilizado, e só essas! Por isso, o utilizador deve escolher, como motivos, imagens que não tenham simetria. Caso contrário, são ignoradas pelo programa as simetrias que resultem da imagem usada e não das propriedades do carimbo. Esta "exigência" do programa é perfeitamente natural e coerente com a matemática envolvida.