Alexander Kovačec
Universidade de Coimbra
kovacec@mat.uc.pt

COMPARAR ÁREAS SEM CÁLCULOS: O TEOREMA DE BOLYAI-GERWIEN

Em tempos antigos, muito antes de a escola nos ter metido nas cabeças métodos penosos de contagem "um, dois, três, ... mil trezentos e dezasseis, ...", etc., pastores que queriam saber se o número de carneiros que tinham era igual ao das ovelhas, "casaram" cada carneiro com uma ovelha. A resposta era sim, se e só se não sobrassem nem ovelhas nem carneiros. De forma algo semelhante, um carpinteiro, que não sabe usar fórmulas para calcular áreas, pode decidir se uma dada folha poligonal de ouro dá ou não para dourar a parede extravagante de um arquiteto do cubismo.

As primeiras páginas de um livro de história de matemática como [1] convencem-nos de que os conceitos de comprimento, área, volume, são dos mais intuitivos, mais antigos e mais básicos de toda a matemática: "os registos mostram que todos os povos antigos que consideramos sabiam como calcular as áreas de figuras simples e retilíneas". Poucas páginas depois, sabemos que os babilónios já conheciam o volume de uma pirâmide em termos de área de base e altura.

Na verdade, ao longo de toda a história da matemática o cálculo de áreas e volumes atraiu a atenção. Já os gregos, nomeadamente Arquimedes (287-212 a.C.) baseando-se em Eudoxo (408-355 a.C.), calcularam áreas de figuras limitadas por linhas curvas por um método a que chamaram "exaustão". Hoje em dia, tais áreas são calculadas por cálculo integral inventado por Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716). Estes autores ainda não tinham uma boa teoria dos números reais. Os gregos, sempre zelando pelo rigor das suas afirmações, quando não foi possível doutra forma, deram estimativas (para π, por exemplo) ou evitaram o cálculo explícito de limites usando raciocínio por absurdo: "se esta área fosse $< 2/3$, então ... contradição; se fosse $> 2/3$, então ... contradição ... logo a área é $2/3$." Os inventores do cálculo tiveram grandes dificuldades em justificar os seus argumentos. Procuraram refúgio em "quantidades infinitamente pequenas", "fluxões" etc. Mesmo quando Riemann (1826-66) formula a sua definição de integral em 1853 ainda menciona tais quantidades. Para resumir uma história complexa: as últimas deficiências na fundamentação do cómodo cálculo integral acabam apenas depois da construção de uma teoria satisfatória dos números reais, e de definições de continuidade e limites de sucessões por Dedekind, Cantor, Weierstrass, Heine.

Devidamente interpretado todo este processo é exemplo de um *dictum* de Immanuel Kant: "Toda a cognição humana começa com a intuição, passa daqui para noções e termina com ideias." Se olharmos mais de perto para o desenvolvimento do conceito de área, vemos outro exemplo.

Temos uma intuição de área adquirida em criança, fazemos cálculos semi fundamentados com noções como "superfície" e "áreas" enquanto alunos, e só o homem que faz da matemática a sua vida aprende que pensadores anteriores cristalizaram o conceito numa ideia abstrata axiomatizando a "área" como sendo uma aplicação μ que associa a certos subconjuntos A do plano (a cada "figura") um real $\mu(A)$ tal que são válidas as seguintes propriedades:

a) Toda a figura A tem uma área não negativa: $\mu(A) \geq 0$;

b) Se A e B são duas figuras disjuntas, então
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B);$$

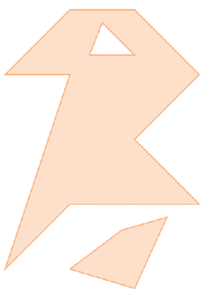
c) Se A' é uma figura obtida por um movimento euclidiano (i.e., translações e rotações) partindo da figura A, então $\mu(A') = \mu(A)$.

d) Se a figura Q é um quadrado de lado 1, então $\mu(Q) = 1$.

Quando examina minuciosamente as subtilezas das propriedades propostas, o *homo mathematicus* vê para seu espanto que não é possível atribuir uma área a todos os subconjuntos do plano; a proposta levaria literalmente a contradições do tipo 1 = 0. Como vimos, para a indicação exata de áreas de regiões limitadas por arcos, são precisos tipicamente números e processos que transcendem métodos elementares.

Mas figuras retilíneas? Será possível decidir a igualdade da área de dois polígonos sem ter de aprender primeiro estas pesadas teorias de integrais, reais, limites?

Esta questão foi resolvida de forma afirmativa por Farkas Bolyai, amigo de Gauss e pai do posterior co-fundador da geometria não euclidiana Janos Bolyai (1832), e o oficial e matemático amador Gerwien em 1833. É objeto do presente Canto Délfico.



Por um poliedro (plano) entendemos uma figura limitada e fechada do plano cuja fronteira é união de um conjunto finito de segmentos retilíneos. Pode ser uma figura desconexa e ter "buracos". Este tipo de poliedro é por vezes chamado polígono; mas frisamos que na abordagem presente é importante que o "interior" pertença à figura. Dois poliedros P, P' dizem-se *equidecomponíveis* se existir uma família finita de poliedros $P_1, \cdots, P_k$ que sujeitos a movimentos euclidianos $\sigma_1, ..., \sigma_k$ e $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_k$ permitam tanto compor P como P' sem que quaisquer dois dos P_i tenham pontos interiores em comum. Esta exigência é mais fraca do que uma união disjunta e em vez do símbolo $\uplus$ utiliza-se o símbolo Σ para o efeito. Assim, temos $P = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(P_i)$ (ou $P = \sigma_1(P_1) + \cdots + \sigma_k(P_k)$) e $P' = \sum_{i=1}^{k} \sigma'_i(P_i)$. Se P e P' são equidecomponíveis, então escreve-se $P \sim P'$.

Através de uma série de exercícios e alguns lemas vamos mostrar o seguinte teorema.

Teorema (Bolyai-Gerwien). *Dois poliedros são equidecomponíveis se e só se eles tiverem a mesma área.*

É claro que a equidecomponibilidade de dois poliedros implica que têm a mesma área: isto é consequência dos axiomas b) e c). O resto do ensaio é dedicado à demonstração de que dois poliedros da mesma área são equidecomponíveis.

Exercício 1. Um qualquer poliedro pode ser decomposto em triângulos.

Exercícios mesmo sem o habitual "mostre que ..." ou algo semelhante são convites ao leitor para que demonstre o enunciado; no caso atual sugere-se indução sobre o número de vértices.

Lema 2. *Equidecomponibilidade é uma relação de equivalência na família de poliedros. Isto é: Se P, P', P'' são poliedros, então temos as seguintes propriedades i), ii), iii) ditas reflexividade, simetria, e transitividade, respetivamente.*

i) $P \sim P$;

ii) Se $P \sim P'$, então $P' \sim P$;

iii) Se $P \sim P'$ e $P' \sim P''$, então $P' \sim P''$.

Prova. As afirmações i), ii) podemos deixar como exercícios. A afirmação iii) também não é difícil: por hipótese existem decomposições de P' em poliedros $P' = P_1 + \cdots + P_k$ e $P' = P'_1 + \cdots + P'_l$ tal que certos movimentos de $P_1, ..., P_k$ dão P, e certos movimentos de $P'_1, ..., P'_l$ dão P''. Ora em P' podemos imaginar estas decomposições numa sobreposição que origina outra família de poliedros, a saber as interseções $P_i \cap P'_j$, $i = 1, ..., k$; $j = 1, ..., l$, (cuja união é P'). Após um momento de reflexão, é claro que estas interseções podem por um lado ser movidas e recompostas de modo a obtermos P, e por outro lado tal que obtemos P''. Isto mostra $P \sim P''$ como queríamos.

Exercício 3. Para todo o triângulo T existe um retângulo R que tem com T um lado comum e é equidecomponível com ele.

Pista: a decomposição mais natural dá a fórmula:

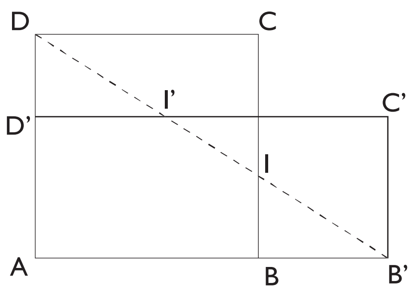
"área de um triângulo = (base × altura)/2."

Lema 4. *Todo o retângulo é equidecomponível com um retângulo em que a fração lado comprido/lado curto é* ≤ 4.

Prova. Sejam $a \geq b$ os lados do retângulo dado. Se $a/b \leq 4$ não precisamos de fazer nada. Suponhamos agora $a/b > 4$ e s.p.d.g.[1] que o lado comprido a é horizontal. Divida-se o retângulo em dois iguais através de um corte vertical que passa pelos pontos médios dos lados horizontais inferior e superior. Ponha-se um destes retângulos no topo do outro. Obtemos um retângulo de lados $a' = a/2$ e $b' = 2b$. Diminuímos assim a razão entre os lados do retângulo por um fator 4: $a'/b' = \frac{1}{4}(a/b)$. Aplicando este processo repetidas vezes chegamos a um retângulo em que a mencionada razão está compreendida entre 1 e 4.

O seguinte lema é a parte central do argumento.

Lema 5. *Um retângulo com lados a, b e tal que* $1 \leq a/b \leq 4$ *é equidecomponível com um quadrado de lado* $\sqrt{ab}$.



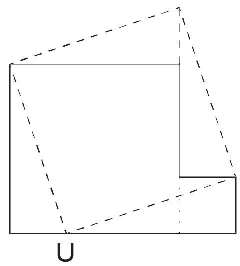
Prova. Na figura acima vemos um quadrado [ABCD] de lado que se supõe ser $\sqrt{ab}$ em sobreposição com um retângulo [AB'C'D'] de lados $a = |AB'|$ e $b = |B'C'|$. Num sistema cartesiano com origem no vértice comum A das duas figuras, e eixo xx contendo o lado [AB'] do retângulo, a equação da reta que passa por D e B' é $y/\sqrt{ab} + x/a = 1$. Em particular passa pelo ponto $I = (\sqrt{ab}, \sqrt{ab} - b)$. Como $a \leq 4b$, temos $\sqrt{ab} - b \leq \sqrt{4b^2} - b = b$. Isto significa que o ponto I está dentro do retângulo. Portanto, a diagonal está dentro da área coberta pelas figuras. A parte do quadrado que sobressai do retângulo forma, ela mesma, um retângulo de lados verticais $\sqrt{ab} - b$.

Disto obtemos a congruência dos triângulos [DD'I'] e [IBB']. Logo, as hipotenusas destes triângulo são iguais, i.e. $|DI'| = |IB'|$. Logo $|DI| = |DI'| + |I'I| = |I'I| + |IB'| = |I'B'|$. Por isso podemos deslizar o triângulo [I'B'C] ao longo do segmento tracejado até que coincida com o triângulo [DIC]. De forma análoga, podemos mover o triângulo [IBB'] até que coincida com [DD'I']. Desta forma criámos, partindo do retângulo [AB'C'D'] um quadrado [ABCD]. A solução do exercício seguinte acaba a prova do lema.

Exercício 5. Demonstre detalhadamente as congruências usadas na prova e diga em que componentes devemos segundo o argumento anterior decompor o retângulo [AB'C'D'] para obter o quadrado [ABCD].

O seguinte exercício sugere uma prova do teorema de Pitágoras.

Exercício 6. Dois quadrados disjuntos são equidecomponíveis com um único quadrado.



Sugestão. Considerem o contorno a cheio da figura. Esse indica dois quadrados de lados $a \geq b$, digamos; um ao lado do outro. O ponto U é escolhido de modo a dividir o segmento horizontal inferior na razão $b : a$. Os dois segmentos tracejados que partem de U definem o paralelograma tracejado. Porque é que este paralelograma é na verdade um quadrado, e porque é que é equidecomponível com o poliedro original formado pelos dois quadrados juntos?

Corolário 7. *Todo o poliedro é equidecomponível com um quadrado.*

Prova. Seja P o poliedro dado. Pelo exercício 1 podemos decompô-lo numa família de triângulos. Pelo exercício 3, cada um dos triângulos é equidecomponível com um retângulo.

E pelo lema 4 cada um destes retângulos é equidecomponível com um retângulo em que os lados têm razão compreendida no intervalo $[1/4, 4]$. Pelo lema 5 estes retângulos são equidecomponíveis com quadrados. Aplicando o exercício 6 repetidas vezes, a família de quadrados obtida é equidecomponível com um único quadrado. Como, pelo lema 2, a equidecomponibilidade de figuras é uma relação de equivalência, logo transitiva, obtemos a afirmação do corolário 7.

Do corolário 7 obtemos a prova do teorema de Bolyai-Gerwien, pois se P, P' são dois polígonos com a mesma área A, então são ambos equidecomponíveis com um quadrado Q de lado $\sqrt{A}$. E assim $P \sim Q \sim P'$ dá-nos $P \sim P'$, como queríamos mostrar.

Mencionemos ainda dois desenvolvimentos posteriores, intimamente ligados ao nosso tópico. Provavelmente, já sabendo do teorema de Bolyai, Gauss lamentou junto do seu discípulo Gerling que a prova do teorema de que pirâmides triangulares da mesma altura e da mesma base têm o mesmo volume depende do método da exaustão. Esta observação foi mencionada por Hilbert na sua famosa palestra "Problemas Matemáticos" que viria a influenciar decisivamente o desenvolvimento da matemática do século XX. No seu terceiro problema diz: "Parece-me que uma prova deste tipo [dado por Bolyai e Gerwien para poliedros planos] não é possível para [poliedros a três dimensões]". Este facto foi provado, já em 1901, por Max Dehn; o terceiro problema de Hilbert tornou-se assim o primeiro resolvido. Provas muito mais simples e transparentes do que a de Dehn foram desenvolvidas por Sydler, Kagan e Boltiansky. Uma exposição extraordinariamente legível é dada no livro [2].

Questões ligadas a volumes levaram também a famosos paradoxos. O paradoxo de Hausdorff-Banach-Tarski diz que quaisquer dois corpos tridimensionais de extensão finita e com interiores não-vazios são equidecomponíveis. Estas decomposições, ao contrário das mencionadas acima, não são, no entanto, construtivas; a mera existência destas é uma consequência do axioma da escolha, ver [3], [4].

Convidamos sobretudo professores e alunos de escolas secundárias a enviar soluções aos exercícios, observações e perguntas ao

Projecto Delfos
Departamento de Matemática
Apartado 3008, E.C. Universidade
3001-454 Coimbra

Agradecimentos: À minha mulher Bernardete Ribeiro pela ajuda linguística e por me ter ensinado o Tikz (para fazer as figuras).

REFERÊNCIAS

[1] V. Katz, *A History of Mathematics*, Addison Wesley Longman, 1998

[2] V.G. Boltianski, *Hilbert"s Third Problem*, Winston & Wiley, 1978

[3] A. Kovaćec, "The Banach Tarski Paradox", (3págs.; acompanhantes de uma palestra, DMUC, Abril de 2002)

[4] S. Wagon, *The Banach Tarski Paradox*, Cambridge 1985.

[1] Sem perda de generalidade