MANUEL SILVA
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

PEDRO J. FREITAS
Universidade de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

UM **PROBLEMA** DE **MATRIZES** COM **FAVOS** DE **MEL**

Aquilo que parecia ser um pequeno problema de matrizes veio a revelar-se uma fonte de inesperadas e profundas ligações entre diversas áreas da matemática.

Ao contrário dos textos anteriores desta coluna, este terá necessidade de um conceito que em geral apenas se aprende no primeiro ano de um curso universitário: o conceito de valor próprio de uma matriz quadrada. Relembrando então, se A for uma matriz real ou complexa, com n linhas e n colunas, x for uma matriz coluna, não nula, com n entradas, e λ um número complexo ou real, então λ diz-se um valor próprio de A com vetor próprio x se $Ax = \lambda x$. De um ponto de vista geométrico, se considerarmos as matrizes coluna como vetores complexos, então A induz uma transformação de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$ através da fórmula $x \mapsto Ax$, chamada uma transformação linear. Deste ponto de vista, um vetor próprio é apenas um vetor que está numa *direção invariante* para esta transformação, é um vetor sobre o qual a ação de A é a de uma homotetia de razão λ.

Há várias transformações do plano e do espaço que estão associadas a matrizes, tais como rotações em torno da origem, homotetias com centro na origem ou projeções sobre retas ou planos. Neste artigo vamos examinar um tipo de matrizes, interessantes quer para físicos quer para matemáticos, chamadas *matrizes hermíticas*, que são matrizes quadradas complexas que satisfazem $A = \overline{A^T}$. Estas matrizes têm uma propriedade crucial: *todos os seus valores próprios são reais*, o que permite, por exemplo, ordená-los.

Um problema famoso, e natural, acerca de matrizes hermíticas, colocado por H. Weyl em 1912, é o de saber quais são os valores próprios da soma de duas matrizes hermíticas, sabendo os valores próprios das parcelas. Mais exatamente, se nos forem dadas três listas de números reais λ, μ e ν; $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$, $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n$ e $\nu_1 \geq \ldots \geq \nu_n$, que condições devem estas listas satisfazer para que existam matrizes hermíticas A e B de modo a que λ sejam os valores próprios de A, μ os de B e ν os de $A + B$.

Uma condição simples obtém-se calculando o traço de ambas as matrizes e sabendo que esse traço é a soma dos valores próprios:

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i).$$

Além desta relação imediata, são conhecidas relações clássicas, devidas a Weyl (1912), que exigem que $\nu_{i+j-1} \leq \lambda_i + \mu_j$ para $i + j - 1 \leq n$. No caso de matrizes 2×2, estas desigualdades resolvem o problema, mas em geral não são suficientes. Algumas décadas mais tarde, foram descobertas as seguintes desigualdades, devidas respetivamente a Ky Fan (1949) e V. B. Liskii (1950): para $1 \leq k \leq n$,

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_i \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i$$

e, generalizando as anteriores, para todo o $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $|I| = k$,

$$\sum_{i \in I} \nu_i \leq \sum_{i \in I} \lambda_i + \sum_{i \in I} \mu_i.$$

Várias outras desigualdades foram depois descobertas, todas elas com o seguinte aspeto:

$$\sum_{i \in K} \nu_i \leq \sum_{i \in I} \lambda_i + \sum_{i \in J} \mu_i,$$

para conjuntos $I, J, K \subseteq \{1, \ldots, n\}$ com a mesma cardinalidade. Então, em 1962, Alfred Horn apresentou em [1], uma conjetura que descrevia completamente os conjuntos I,J,K que dariam desigualdades suficientes para resolver o problema. A construção é feita por indução na cardinalidade e é bastante intrincada.

Até este ponto, algumas das demonstrações das fórmulas já tinham usado matemática exterior à teoria de matrizes – por exemplo, a demonstração original das desigualdades de Liskii foi feita dentro da teoria de grupos de Lie. O resto da história deste problema viria a confirmar esta tendência. A própria caracterização de Horn torna-se mais simples quando se usam conceitos profundos de geometria algébrica, do chamado cálculo de Schubert. A demonstração final da conjetura de Horn foi feita usando esta teoria, por Klyachko, [2] e Knutson e Tao [3].

Neste último artigo de Knutson e Tao, é apresentada a noção de *honeycomb*, uma estrutura no plano, que faz uma descrição combinatória do problema à custa de linhas que produzem figuras semelhantes às paredes de um cortiço (ver, por exemplo, [4]). Os valores próprios são codificados pelas coordenadas das linhas que se prolongam no fim do padrão, nos sentidos sul, nordeste e noroeste. O padrão é obtido à custa de uma condição de equilíbrio nos pontos de intersecção (na imagem, $\nu_1, \ldots, \nu_5$ são os valores próprios de $-(A+B)$).

Foram igualmente descobertas por Klyachko, Knutson e Tao relações destas desigualdades com a teoria da representação – mais especificamente na descrição da decomposição de produtos tensoriais de representações irredutíveis de $GL_n(V)$.

Assim, aquilo que parecia ser um pequeno problema de matrizes veio a revelar-se uma fonte de inesperadas e profundas ligações entre diversas áreas da matemática. Para mais informação, recomendamos a leitura dos excelentes artigos [5], [6] e [4].

REFERÊNCIAS

[1] A. Horn, "Eigenvalues of Sums of Hermitian Matrices", *Pacific J. Math.* vol. 12 (1962), no. 1, 225–241.

[2] A. A. Klyachko, "Stable Bundles, Representation Theory and Hermitian Operators", *Selecta Mathematica*, New Series, vol. 4 (1998), no. 3, 419– 445.

[3] A. Knutson, T. Tao, "The Honeycomb Model of $GL_n(C)$ Tensor Products I: Proof of the Saturation Conjecture", *J. Amer. Math.* Soc. 12 (1999), 1055–1090.

[4] A. Knutson, T. Tao, "Honeycombs and Sums of Hermitian Matrices", *Notices Amer. Math. Soc.* 48 (2001), no. 2, 175–186.

[5] W. Fulton, Eigenvalues, "Invariant Factors, Heighest Weights, and Schubert Calculus", *Bulletin of the AMS* vol. 37 (2000), no. 3, 209–249.

[6] R. Bhatia, "Linear Algebra to Quantum Cohomology: the Story of Alfred Horn's Inequalities", *Amer. Math. Monthly,* 108 (2001), no. 4, 289–318.