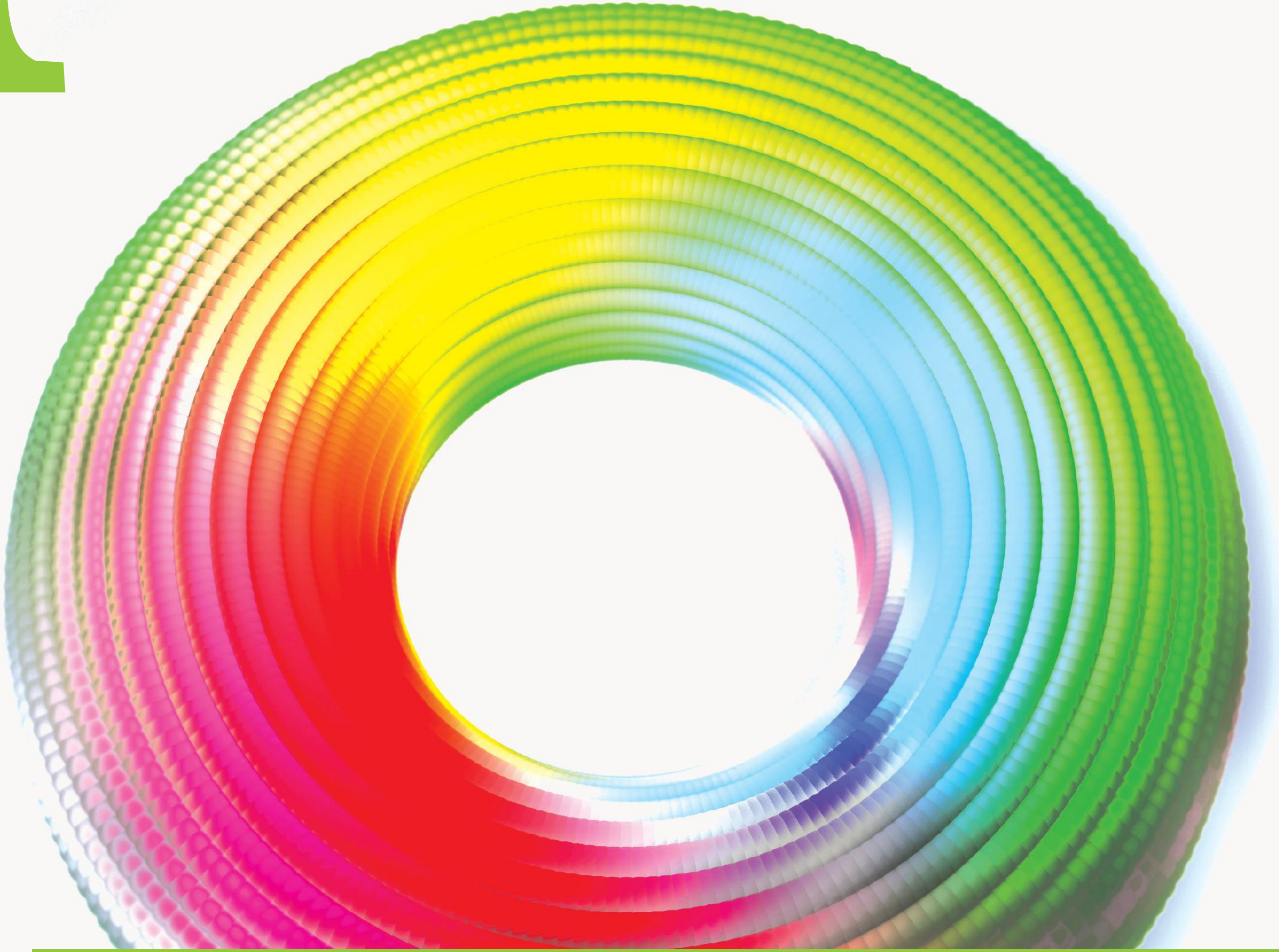

O Teorema de Gauss-Bonnet

José Natário
Instituto Superior Técnico
jnatar@math.ist.utl.pt

1. INTRODUÇÃO

Não distinguimos superfícies que têm a mesma forma, ou **geometria**. Assim, uma superfície esférica numa dada posição do espaço é identificada com outra superfície esférica do mesmo raio noutra posição qualquer do espaço, mas não com a superfície de um elipsóide. Para estudar a geometria de uma superfície usam-se conceitos como comprimentos, ângulos, geodésicas (curvas de comprimento mínimo) e polígonos geodésicos (polígonos cujos lados são arcos de geodésicas).

Como passo inicial para descrever as superfícies classificamo-las de acordo com uma semelhança mais grosseira, em que certos aspetos da sua geometria, como comprimentos e ângulos, são ignorados. Mais precisamente, dizemos que duas superfícies têm a mesma **topologia** se é possível deformar uma na outra continuamente (isto é, sem rasgar nem colar). Por exemplo, a superfície de uma esfera tem a mesma topologia que a superfície de um elipsóide. No estudo da topologia de uma superfície usam-se certas quantidades, como, por exemplo, a característica de Euler, que são invariantes por deformações contínuas.

Neste artigo descrevemos de forma elementar o teorema de Gauss-Bonnet, que relaciona a geometria de uma superfície fechada com a sua topologia. Na secção 2 recordamos a fórmula de Euler para poliedros convexos, e definimos a característica de Euler de uma superfície fechada qualquer. Na secção 3 estudamos a geometria das superfícies dos poliedros: definimos o excesso angular de um polígono geodésico, o defeito angular de um vértice, e provamos um teorema de Descartes que relaciona a soma dos defeitos angulares com a característica de Euler. Este teorema é usado na secção 4 para intuir o teorema de Gauss-Bonnet: a soma dos excessos angulares de qualquer decomposição de uma superfície fechada em polígonos geodésicos depende apenas da sua característica de Euler.

Qual a relação entre a geometria de uma superfície fechada e a sua topologia? Neste artigo descreveremos o Teorema de Gauss-Bonnet, que pode ser visto como o precursor dos grandes teoremas da geometria do século XX.

2. A FÓRMULA DE EULER

A fórmula de Euler para poliedros convexos [1] é bem conhecida:

$$V - A + F = 2,$$

onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces.

Exercício 2.1. *Verifique esta fórmula para os seguintes poliedros convexos:*

1) *Uma pirâmide cuja base é um polígono com n lados (inclui o tetraedro);*

2) *Um prisma cuja base é um polígono com n lados (inclui o cubo);*

3) *O sólido obtido colando duas pirâmides em 1) pela base (inclui o octaedro).*

Existem muitas demonstrações da fórmula de Euler [2]. Um primeiro passo é reduzir o problema ao caso em que todas as faces são triângulos. De facto, se uma dada face é um polígono com n lados podemos sempre decompô-la em n triângulos acrescentando um vértice no seu interior. Desta forma aumentámos V em uma unidade (porque acrescentámos um vértice), aumentámos A em n unidades (porque acrescentámos uma aresta por cada um dos n vértices do polígono) e aumentámos F em $n-1$ unidades (de uma face fizemos n faces). A variação de $V - A + F$ foi então de

$$1 - n + (n-1) = 0,$$

e, portanto, $V - A + F$ tem o mesmo valor para o novo poliedro.

Assumindo então que todas as faces são triângulos, imaginemos que vamos retirando as faces uma a uma. Quando retiramos a primeira face reduzimos F em uma unidade mantendo V e A inalterados. Portanto, $V - A + F$ reduz-se em uma unidade. A partir deste momento existem faces com arestas "livres" (ou seja, que não são arestas de outras faces).

É intuitivamento claro, e pode provar-se rigorosamente[1], que é possível ir retirando faces com arestas livres de forma a que em cada passo as arestas livres formem uma linha fechada simples (sem auto-interseções). Se retirarmos uma face com uma aresta livre, diminuímos F em uma unidade e A em uma unidade, mantendo V constante. Logo, $V - A + F$ mantém-se constante. Se retirarmos uma face com duas arestas livres diminuímos F em uma unidade, A em duas unidades e V em uma unidade. Portanto, também neste caso $V - A + F$ se mantém constante. Quando retiramos todas as faces até só restar um triângulo, temos $V - A + F = 3 - 3 + 1 = 1$. Logo, $V - A + F = 1 + 1 = 2$ para o poliedro inicial.

A superfície de qualquer poliedro convexo tem a mesma topologia que a superfície da esfera. Um poliedro com faces triangulares induz então uma **triangulação** da superfície da esfera, isto é, uma divisão da superfície da esfera em regiões com a topologia de triângulos, que se intersetam ao longo de arestas comuns. A demonstração acima pode ser facilmente adaptada para mostrar que qualquer triangulação da superfície da esfera com F triângulos, A arestas e V vértices satisfaz $V - A + F = 2$. Note-se que isto não tem de ser (e não é!) verdade para superfícies com outras topologias, como, por exemplo, a superfície de um *donut* (*toro*). Continua no entanto a ser verdade que para qualquer superfície fechada S o número inteiro

$$\chi(S) = V - A + F$$

não depende da triangulação usada para o calcular, e é o mesmo para todas as superfícies com essa topologia. Este número chama-se a **característica de Euler** da superfície.

Exercício 2.2. *Verifique que a característica de Euler do toro é zero.*

Exercício 2.3. *Onde é que a demonstração acima de que a característica de Euler da esfera é 2 falha no caso do toro?*

3. UM TEOREMA DE DESCARTES

Para a fórmula de Euler, a geometria exata da superfície do poliedro é irrelevante. Por exemplo, qualquer pirâmide triangular corresponde essencialmente à mesma triangulação da superfície da esfera, independentemente de as suas faces serem triângulos equiláteros, retângulos ou de outro tipo qualquer. No que se segue, iremos olhar cuidadosamente para a geometria da superfície do nosso poliedro [3].

Na geometria habitual do plano, temos o conceito fundamental de segmento de reta. Um segmento de reta tem a propriedade de ser a linha de comprimento mínimo que une os seus dois extremos. Para a superfície de um poliedro qualquer (não necessariamente convexo) podemos definir um conceito análogo, a que chamaremos **arco minimizante.** O arco minimizante entre dois pontos é a linha desenhada sobre a superfície do poliedro que une os dois pontos e tem comprimento mínimo (pode existir mais do que um arco minimizante unindo dois pontos, mas ele é único se os pontos estiverem suficientemente próximos). Mais geralmente, chamaremos arco de geodésica a qualquer linha que coincida com o arco minimizante entre quaisquer dois dos seus pontos, desde que suficientemente próximos. É evidente que a intersecção de um arco de geodésica com cada face do poliedro é um segmento de reta (porque senão seria possível diminuir o seu comprimento), e que se o arco de geodésica cruza uma aresta então os ângulos opostos entre o arco e a aresta devem ser iguais (basta "desdobrar" a aresta, como se mostra na figura 1). Consideraremos apenas arcos de geodésica que não contêm vértices do poliedro.

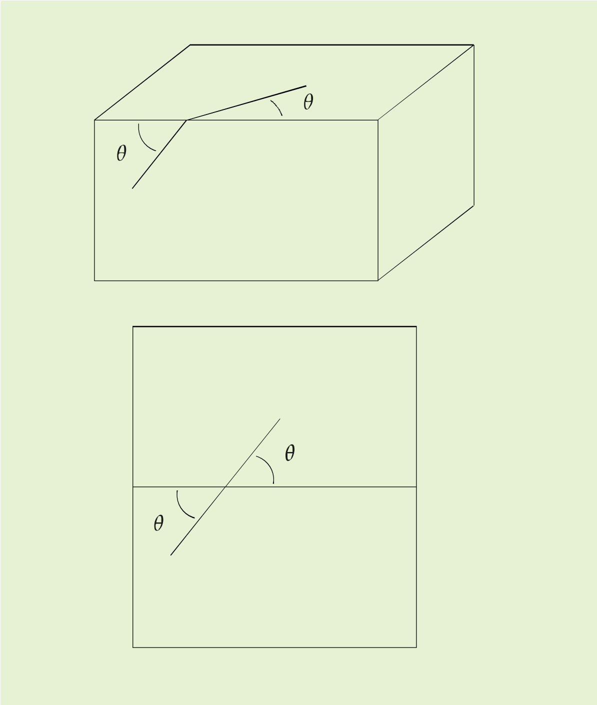

Figura 1: Arco de geodésica num poliedro.

O facto de as arestas poderem “desdobrar-se” mostra que estas, por si só, não introduzem qualquer diferença em relação à geometria do plano. Por exemplo, os ângulos internos de um **triângulo geodésico** (isto é, uma região do poliedro com a topologia de um triângulo cujas arestas são arcos de geodésica) que não contenha nenhum vértice do poliedro no seu interior somam sempre π, mesmo que o triângulo intersete arestas. As diferenças entre a geometria da superfície de um poliedro e a geometria do plano estão concentradas nos vértices: em geral, os ângulos internos de um triângulo geodésico que contenha um vértice no seu interior não somam π. Por exemplo, na figura 2 podemos ver um triângulo geodésico cujos ângulos internos somam $\frac{3\pi}{2}$.

Chamaremos **excesso angular** de um triângulo geodésico à diferença entre a soma dos seus ângulos internos e π. Por exemplo, o excesso angular do triângulo geodésico representado na figura 2 é de $\frac{\pi}{2}$. Chamaremos ainda **defeito angular** de um vértice do poliedro à diferença entre 2π e a soma dos ângulos do poliedro no vértice em questão. Por exemplo, o defeito angular do vértice contido no interior do triângulo geodésico da figura 2 é também de $\frac{\pi}{2}$. Este facto não é uma coincidência: o excesso angular de qualquer triângulo geodésico contendo um único vértice no seu interior é sempre igual ao defeito angular desse vértice. De facto, unindo o vértice do poliedro aos vértices do triângulo geodésico, como se mostra na figura 2, decompomos o triângulo geodésico em três triângulos euclidianos (basta “desdobrar” as arestas apropriadas). Os ângulos internos destes três triângulos euclidianos somam um total de 3π, que tem de ser igual à soma dos ângulos internos do triângulo geodésico mais a soma dos ângulos do poliedro no vértice. Por outras palavras, se ε é o excesso angular e σ é a soma dos ângulos do poliedro no vértice, temos

$$3\pi = (\pi + \varepsilon) + \sigma \Leftrightarrow \varepsilon = 2\pi - \sigma.$$

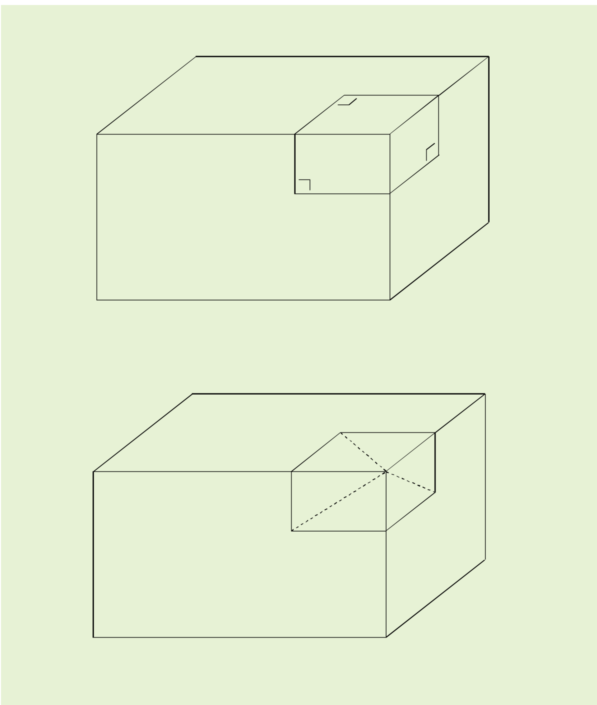

Figura 2: Triângulo geodésico contendo um vértice de um poliedro.

Exercício 3.1. *Dê um exemplo de um poliedro contendo um vértice cujo defeito angular seja negativo. Será que este poliedro pode ser convexo?*

Descartes [4] provou o seguinte teorema:

Teorema 3.2. (Descartes) *Para qualquer poliedro com V vértices, A arestas e F faces, a soma dos defeitos angulares de todos os vértices é igual a $2\pi(V - A + F)$.*

Demonstração. Por um lado, a soma dos defeitos angulares é igual a $2\pi V$ menos a soma de todos os ângulos do poliedro. Por outro lado, a soma de todos os ângulos do poliedro é igual à soma dos ângulos de todas as suas faces. A soma dos ângulos de uma só face é igual a π vezes o número de arestas dessa face menos 2π (ver exercício 3.3). Notando que cada aresta pertence a duas faces distintas, temos então que a soma de todos os ângulos do poliedro é também igual a $\pi(2A) - 2\pi F$. Portanto, a soma dos defeitos angulares é

$$2\pi V - (2\pi A - 2\pi F) = 2\pi(V - A + F).$$

Exercício 3.3. *Mostre que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é igual a $(n-2)\pi$. (Sugestão: decomponha o polígono em triângulos).*

Alternativamente, o teorema de Descartes pode ser formulado em termos da soma dos excessos angulares de uma decomposição do poliedro em triângulos geodésicos contendo

[1] Ver por exemplo a Prova 13 em [2].

no máximo um vértice no seu interior. Esta versão pode ser generalizada para decomposições do poliedro em polígonos geodésicos quaisquer contendo um número arbitrário de vértices no seu interior, onde definimos o excesso angular de um polígono geodésico com n lados como a diferença entre a soma dos seus ângulos internos $(n-2)\pi$.

Teorema 3.4. (Descartes) *A soma dos excessos angulares de uma decomposição qualquer de um poliedro com V vértices, A arestas e F faces em polígonos geodésicos é igual a $2\pi(V-A+F)$.*

Demonstração. Ver exercícios 3.5 e 3.6

Exercício 3.5. *Mostre que o defeito angular do vértice de um poliedro é igual ao excesso angular de um polígono geodésico com n lados que contenha apenas esse vértice no seu interior.*

Exercício 3.6. *Mostre que o excesso angular de um polígono geodésico contendo vários vértices no seu interior é igual à soma dos defeitos angulares dos vértices.*

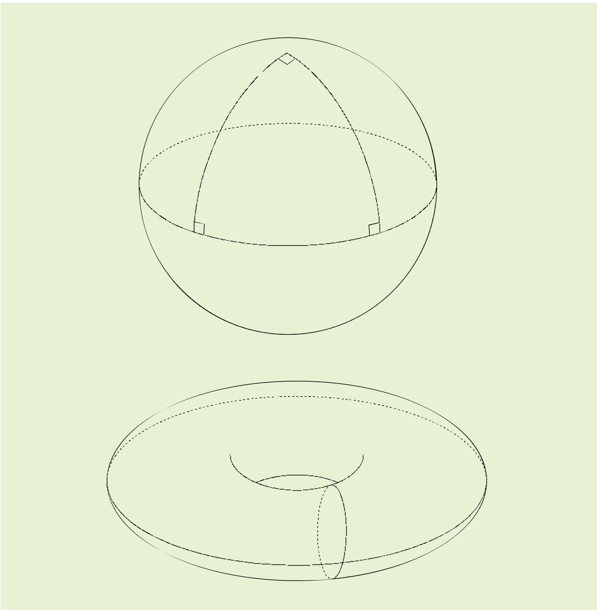

Figura 3: Triângulo geodésico na superfície da esfera e geodésicas do toro.

4. O TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Para superfícies curvas gerais é ainda possível definir arcos de geodésica. O teorema de Descartes pode então ser generalizado para estas superfícies, aproximando-as por superfícies de poliedros[2] [6, 7].

Teorema 4.1. (Gauss-Bonnet) *A soma dos excessos angulares de uma decomposição qualquer de uma superfície fechada S em polígonos geodésicos é igual a $2\pi\chi(S)$.*

Recorde que um **círculo máximo** na superfície da esfera é a interseção desta com um plano que passa pelo centro da esfera, como, por exemplo, o equador ou um meridiano. Os arcos de geodésica da superfície da esfera são precisamente os arcos de círculo máximo (exercício 4.2). É possível dividir a esfera em 8 triângulos geodésicos como o que se mostra na figura 3, cada um dos quais possui um excesso angular de $\frac{\pi}{2}$. O excesso angular total é portanto $8 \times \frac{\pi}{2} = 4\pi$, em conformidade com o teorema de Gauss-Bonnet.

Exercício 4.2. *Mostre que os arcos de círculo máximo são arcos de geodésica da superfície da esfera. (Sugestão: note que a esfera é invariante por reflexões em relação ao plano que contém o círculo máximo, e use o facto de que o arco minimizante entre dois pontos suficientemente próximos é único).*

Exercício 4.3. *Mostre que os "meridianos" e o "equador" do toro (figura 3) são formados por arcos de geodésica, e verifique a validade do teorema de Gauss-Bonnet para esta superfície.*

No limite em que os polígonos ficam muito pequenos, a soma dos excessos angulares reduz-se ao integral de superfície

$$\iint_S K,$$

onde K é o excesso angular por unidade de área, dito a **curvatura** da superfície. O teorema de Gauss- Bonnet escreve-se então [8]

$$\iint_S K = 2\pi\chi(S).$$

Exercício 4.4. *Calcule a curvatura da superfície de uma esfera de raio R. (Sugestão: note que a esfera é invariante por rotações).*

Exercício 4.5. *Mostre que em qualquer superfície com a topologia da esfera existem pontos onde a curvatura é positiva.*

Exercício 4.6. *Mostre que a curvatura de uma superfície com a topologia do toro não pode ser positiva em todos os pontos.*

O teorema de Gauss-Bonnet relaciona uma propriedade geométrica local (curvatura) com uma propriedade topológica global (característica de Euler). Ideias deste género revelaram-se extraordinariamente férteis, tendo inspirado não só as muitas generalizações do teorema de Gauss-Bonnet, que vão da teoria das classes características ao teorema do índice de Atiyah-Singer, mas, indiretamente, muita da geometria do século XX.

REFERÊNCIAS

[1] Richeson, *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*, Princeton University Press (2008)

[2] Eppstein, "Nineteen Proofs of Euler's Formula", *http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/*

[3] Viana, "Viagens pelos Mundos Planos", *http://w3.impa.br/~viana/out/plano.pdf*

[4] *http://en.wikipedia.org/wiki/Defect–(geometry)*

[5] Zames, "Surface Area and the Cylinder Paradox", *Two-Year College Math. J.* **8** (1977) 207-211

[6] Givental, "Geometry of Surfaces and the Gauss-Bonnet Theorem", *http://math.berkeley.edu/~giventh/difgem.pdf*

[7] Polya, "An Elementary Analogue to the Gauss-Bonnet Theorem", *Am. Math. Month.* **61** (1954) 601-603

[8] *http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss-Bonnet–theorem*

SOBRE O AUTOR

José Natário doutorou-se em Matemática na Universidade de Oxford em 2000. É atualmente professor associado no Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico, onde desenvolve investigação nas áreas de geometria e física matemática. É autor de dezenas de artigos científicos e de um livro, *General Relativity Without Calculus* (Springer, 2011), no qual tenta explicar as ideias principais da relatividade geral usando apenas matemática elementar.

[2] Este tipo de limite é delicado – veja-se por exemplo [5].