NOVAS HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA ANTIGA

Bernardo Mota
Universidade de Lisboa
bernardomota@campus.ul.pt

TRADUZIR, ENTENDER, ANOTAR, E AMALDIÇOAR DIOFANTO

A *Aritmética* de Diofanto continua, direta ou indiretamente, a promover investigação original por parte de matemáticos modernos. Basta lembrar que a famosa conjetura enunciada por Fermat à margem de uma edição de Diofanto apenas foi demonstrada em 1994. Estamos em boa altura para mostrar as dificuldades envolvidas na tradução para português do texto original.

Apresento em baixo duas traduções possíveis da proposição 8 do livro 2 da *Aritmética* de Diofanto que fiz a partir da edição do texto grego de Paul Tannery. Acrescentei a ambas, com numerais árabes, os passos do algoritmo proposto pelo matemático grego; o texto original (imagem na página seguinte) apresenta o texto corrido sem distinguir as diferentes etapas do argumento.

Algumas expressões visam produzir em português um efeito semelhante ao do grego dos manuscritos, e precisam de ser descodificadas. Eis a Pedra de Roseta:

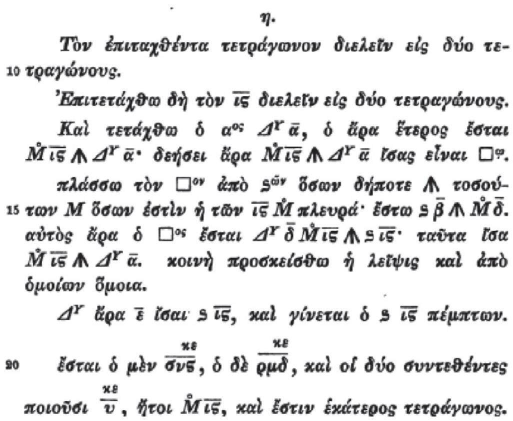
1) ABREVIATURAS. "Q" = "quadrado" (nos manuscritos, a palavra surge muitas vezes abreviada); "U"="unidades", (o termo *monades* aparece normalmente abreviada para "M" com um pequeno círculo sobreposto); "N"="número" (vis-

1. Decompor um quadrado proposto em dois quadrados
2. Proponha-se, pois, decompor o 16 em dois quadrados.
3. E ponha-se o primeiro $N^2 1$.
4. Então, o outro será U16 – $N^2 1$.
5. Então, restará que U16- $N^2 1$ são iguais a um Q.
6. Formo o Q a partir de N (quantos-quisermos) – U (tantas-quantas-é-o-lado-das-U16).
   Seja N2 – U4.
7. Então, o próprio quadrado será $N^2 4$ U16 – N16.
8. Estes [são] iguais a U16 – $N^2 1$.
9. Acrescente-se em comum o que está em falta e de iguais, iguais.
   Então, $N^2 5$ [são] iguais a N16. E o N fica 16 quintos.
10. Um será 256/25; o outro 144/25.
11. E os dois juntos fazem 400/25, ou seja, U16. E cada um é um quadrado.

1. [enunciação] $Q_1 + Q_2 = Q_3$
2. [dados] $Q_1 3 = 16; Q_1 + Q_2 = 16$
3. [posição 1, 2] $Q_1 = 1N^2; Q_1 + Q_2 = Q_3 \iff 1N^2 + Q_2 = 16$
4. [3] $1N^2 + Q_2 = 16 \leftrightarrow Q_2 = 16 - 1N^2$
5. $16 - 1N^2 = Q$
6. [5, posição] $Q = (2N - 4)^2$
7. [6] $Q = (2N - 4)^2 \leftrightarrow Q = 4N^2 + 16 - 16N$
8. [5,7] $4N^2 + 16 - 16N = 16 - 1N^2$
9. [8] $4N^2 + 16 - 16N = 16 - 1N^2 \iff 5N^2 = 16N \iff$
   $5N = 16 \iff N = \frac{16}{5}$
10. [3, 4, 9] $Q_1 = 1N^2 \iff Q_1 = \frac{256}{25}; Q_2 = 16 - 1N2 \iff$
    $Q_2 = \frac{400}{25} - \frac{256}{25} \iff Q_2 = \frac{144}{25}$
11. $Q_1 + Q_2 = \frac{256}{25} + \frac{144}{25} \iff Q_1 + Q_2 = \frac{400}{25} \iff$
    $Q_1 + Q_2 = 16; \ \sqrt{\frac{256}{25}} = \frac{16}{5}; \ \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{25}$

to que *arithmos* surge abreviado na maior parte das vezes); “$N^{2}1$”=“1 potência”, o texto grego apresenta a expressão “$D^{y}1$”, que significa “1 *dynamis*” e é apenas utilizado para expressar o quadrado da incógnita. As abreviaturas dos manuscritos correspondem, portanto, à parte literal dos nossos monómios e o numeral (que em grego é representado por uma ou várias letras), ao nosso coeficiente. Eis como a filologia ajuda a explicar um pouco de história dos símbolos matemáticos. No entanto, é preciso notar: o manuscrito mais antigo de Diofanto é do século XIII e não podemos confirmar se o próprio Diofanto escrevia desta maneira.

2) OPERAÇÕES. O símbolo que representa a subtração é, ao que parece (nem tudo o que diz respeito à cultura antiga é certo), uma abreviatura da palavra “falta/redução” (em grego: *leipsis*). “Quatro menos dois” será, em grego, algo como “quatro com falta/redução de dois”. A soma não tem símbolo, os elementos a adicionar são justapostos: a expressão “N4 U2” significa “$4x + 2$”, ou “quatro números e duas unidades”. As frações estão escritas como nós as escrevemos, mas com o denominador em cima e o numerador em baixo. A igualdade não tem símbolo; a expressão “é igual a” (*isos estin*, quando o sujeito é *arithmos*), quando abreviada, limita-se a perder a forma verbal “é” (há expressões alternativas para indicar resultados: “a soma é...”, “o número fica...”).


η.

Τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν $\overline{\iota\varsigma}$ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Καὶ τετάχθω ὁ $\alpha^{o\varsigma}$ $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$, ὁ ἄρα ἕτερος ἔσται $\mathring{M}\,\overline{\iota\varsigma}$ ⋔ $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$· δεήσει ἄρα $\mathring{M}\,\overline{\iota\varsigma}$ ⋔ $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ ἴσας εἶναι $\square^{\omega}$.

πλάσσω τὸν $\square^{ov}$ ἀπὸ $\varsigma^{\tilde{\omega}\nu}$ ὅσων δήποτε ⋔ τοσούτων M ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν $\overline{\iota\varsigma}$ $\mathring{M}$ πλευρά· ἔστω $\varsigma\,\overline{\beta}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\delta}$. αὐτὸς ἄρα ὁ $\square^{o\varsigma}$ ἔσται $\Delta^{Y}\overline{\delta}\,\mathring{M}\,\overline{\iota\varsigma}$ ⋔ $\varsigma\,\overline{\iota\varsigma}$· ταῦτα ἴσα $\mathring{M}\,\overline{\iota\varsigma}$ ⋔ $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια.

Δ^{Y} ἄρα $\overline{\varepsilon}$ ἴσαι $\varsigma\,\overline{\iota\varsigma}$, καὶ γίνεται ὁ ς $\overline{\iota\varsigma}$ πέμπτων.

ἔσται ὁ μὲν $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\sigma\nu\varsigma}}$, ὁ δὲ $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\rho\mu\delta}}$, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\upsilon}}$, ἤτοι $\mathring{M}\,\overline{\iota\varsigma}$, καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

3) APLICAÇÃO DE LEIS ALGÉBRICAS. “Acrescente-se em comum o que está em falta e de iguais, [tire-se] iguais” = “Some-se a ambos os membros os termos negativos e reduza-se os termos semelhantes”. Por vezes, Diofanto não as explicita.

4) OUTROS ASPETOS LINGUÍSTICOS. A linguagem é, por vezes, geométrica, daí a utilização de termos como “lado”, para “raiz”. Mantive artigos, onde o português os não usa: “decompor o [número] 16”.

Façamos uma experiência de leitura (passo 6): “Formo o quadrado a partir de tantos números quantos quisermos menos tantas unidades quantas é o lado das 16 unidades. Seja dois números menos quatro unidades”.

Traduzir, já está. Entender a solução não parece complicado: o passo fundamental é o sexto, no qual Diofanto forma um quadrado a partir da expressão $mN - \sqrt{Q_3}$; a partir daqui, é fácil.

O problema é que Diofanto não apresenta justificação para este passo, por mais evidente ou trivial que possa parecer. Não conhecemos o seu método de descoberta; não conseguimos reconstruir as etapas do desenvolvimento histórico desta solução particular, não temos a certeza de ter percebido bem a razão por que a solução funciona sempre. Geometricamente, o problema reduz-se a transformar um gnómon num quadrado, o que se pode fazer (e demonstrar) facilmente recorrendo a *Elementos* 2.14 (quadratura de um paralelogramo), depois de se ter transformado o gnómon num retângulo (por meio de construções elementares do livro primeiro dos *Elementos* e do teorema quinto do livro segundo). Diofanto, no entanto, não faz geometria e, no seu argumento, limita-se a criar uma *posição* (o que isto significa para ele é discutível; outro tipo de *posição* corresponde ao passo 3). A sensação para quem lê é mais ou menos a mesma que ler um problema dos *Elementos* que só apresenta a parte da construção e não a da demonstração.

O assunto não é menor. Provavelmente depois de ter perdido muitas horas a tentar entender ou explicar o passo, um comentador do século XIII não aguentou mais e desabafou noutra nota famosa que permanece à margem do manuscrito de Madrid da *Aritmética* (Codex Matritensis 48): “A tua alma esteja com Satanás, Diofanto, por causa da dificuldade dos outros teoremas e, principalmente, deste teorema aqui.” Não sei se Fermat tinha a solução para a sua conjetura. O que sei é que há os que tentam e desesperam e há os que tentam e estabelecem uma agenda. E também fica claro que a magia da matemática antiga não está, às vezes, nos resultados que deixa bem estabelecidos, mas nos que deixa em aberto.

Já agora, aqui fica a nota de Fermat, como consta na página 61 da edição da *Aritmética* de Diofanto de 1670), com cada expressão traduzida para português, para cumprir o título deste pequeno artigo de forma mais completa:

Cubum (um cubo) *autem* (por outro lado) *in duos cubos* (em dois cubos), *aut* (ou) *quadratoquadratum* (um quadradoquadrado) *in duos quadratoquadratos* (em dois quadradoquadrados) *et* (e) *generaliter* (em geral) *nullam* (nenhuma) *in infinitum* (até ao infinito) *ultra quadratum* (maior que o quadrado) *potestatem* (potência) *in duos* (em dois) *eiusdem* (do mesmo) *nominis* (nome) *fas est* (é possível) *diuidere* (dividir) *cuius* (deste) *rei* (facto) *demonstrationem* (uma demonstração) *mirabilem* (extraordinária) *sane* (verdadeiramente) *detexi* (descobri). *Hanc* (esta) *marginis* (da margem) *exiguitas* (a estreiteza) *non* (não) *caperet* (poderia conter).

Tradução corrida: "Por outro lado, não é possível dividir um cubo em dois cubos, ou um biquadrado em dois biquadrados, nem, em geral, uma potência maior do que o quadrado, até ao infinito, em duas do mesmo nome [= em duas potências com o mesmo expoente]. Descobri uma demonstração verdadeiramente admirável deste facto, mas a estreiteza desta margem não a poderia conter."

É ou não verdade que o latim confere a tudo um toque mais clássico?

REFERÊNCIAS

Para o texto grego de Diofanto, a edição de referência continua a ser a de Paul Tannery (*Diophanti Alexandrini Opera Omnia cum Graecis Commentariis*, Stuttgart, Teubner, 1893, 2 vols). Thomas L. Heath fez uma paráfrase, mais do que uma tradução, desta edição para inglês (*Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra*, Cambridge University Press, 1910, 2a ed.); Paul Ver Eecke traduziu-a para francês (*Diophante d'Alexandrie. Les Six Livres Arithmétiques et le Livre des Nombres Polygones*, Paris, Albert Blanchard, 1959). A tradição árabe, cuja relação com a grega é assunto de difícil solução, foi traduzida para francês por Roshdi Rashed (*Les arithmétiques. Tome III: Livre IV; Tome IV: Livres V-VI-VII*, Paris, Les Belles Lettres, 1984) e para inglês por J. Sesiano (*Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica: In the Arabic Translation Attributed to Qustā ibn Lūqā*, New York, Springer-Verlag, 1982). Se quiser inteirar-se dos problemas em torno da obra de Diofanto, proponho que comece por aqui: Fabio Acerbi, *The Meaning of* Plasmatikon *in Diophantus' Arithmetica, Archive for History of Exact Sciences* 63 (2009), 5-31; Alain Bernard · Jean Christianidis, *A New Analytical Framework for the Understanding of Diophantus's Arithmetica I-III, Archive for History of Exact Sciences* 66 (2012), 1-69.