

# Erdős e o seu Número

F. J. Craveiro de Carvalho

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

*I wrote a paper once  
about the Collaboration Graph that filled, I claimed,  
a much-needed gap in the mathematical literature.*

Ronald Graham

1. Paul Erdős é uma das figuras carismáticas, sob mais do que um ponto de vista, na Matemática do século XX. Esta é a minha opinião mas, apesar dos 492 co-autores e das cerca de 1500 publicações, confesso que o seu trabalho não acorda em mim o mesmo respeito que as grandiosas construções matemáticas de Alexander Grothendieck, Sir Michael Atiyah ou, em regiões mais vizinhas do meu próprio trabalho, John Willard Milnor.

O facto dos resultados, alguns pelo menos, de Erdős serem de enunciado acessível a quem tenha tido algum contacto com a Matemática contribuirá para aquilo que será, aceito-o sem grandes reservas, um preconceito, à falta de melhor termo. Por exemplo, enunciados como

*Entre um inteiro maior que 1 e o respectivo dobro existe sempre um número primo.*

ou

*Um conjunto infinito de pontos no plano cujas distâncias são inteiros faz parte de uma recta.*

possibilitam que se façam apressadamente juízos de grande ligeireza. Um bom conselho será prestar atenção aos enunciados dos teoremas mas, fundamentalmente, pres-

tar atenção às demonstrações. Afinal toda a gente percebe o enunciado do Último Teorema de Fermat...

O próprio Erdős tinha consciência de que trabalhava em assuntos algo marginais. Cito, da entrevista que surge em [1], a passagem seguinte

*... Sometimes the (Fields Medal) committee just doesn't like a field. ... The people who decide are not that interested in combinatorics.*

Mesmo o pequeno poema, que um colega seu compôs, será tão inocente como parece?

*A conjecture both deep and profound*

*Is whether a circle is round*

*In a paper of Erdős*

*Written in Kurdish*

*A counterexample is found.<sup>1</sup>*

Talvez as coisas estejam a mudar. Uma das Medalhas Fields, no último Congresso Internacional de Matemática, em Berlim, em Agosto de 1998, foi atribuída a William Timothy Gowers, Cambridge University, pelas suas contribui-

---

<sup>1</sup> Trata-se de um *limerick*, pequeno poema humorístico de 5 versos, dos quais os dois primeiros rimam com o último. Em tradução literal teríamos: Uma conjectura funda e profunda // É se uma circunferência é redonda // Num artigo de Erdős // Escrito em curdo // Há um contra-exemplo.

ções nos domínios da Análise Funcional e da Combinatória. A tese de doutoramento de Gowers foi orientada por Béla Bollobás e este, aos dezassete anos, escreveu o seu primeiro artigo, com Erdős precisamente.

Tendo sido tão activo matematicamente durante toda a sua vida e tendo colaborado com tantos matemáticos por esse mundo fora, o impacto de Paul Erdős é indissociável. O *Número de Erdős* dá conta desse impacto.

A primeira vez que vi uma referência a tal número foi na entrevista de [1]. Parece, no entanto, que a primeira referência escrita surge na nota de meia página "And what is your Erdős number?", [3], de 1969. Nessa altura o próprio Erdős desconheceria a existência do seu número.

Um matemático tem número de Erdős 1 se foi co-autor com Paul Erdős e, indutivamente, número de Erdős  $n+1$  se não tiver número de Erdős menor que ou igual a  $n$  e tiver sido co-autor com alguém de número de Erdős  $n$ .

Por exemplo, Einstein tem número de Erdős 2 bem como o matemático português J. Tiago de Oliveira [6]. Richard Borcherds, Cambridge University, a quem também foi atribuída uma Medalha Fields no Congresso de Berlim, tem número de Erdős 2.

2. A noção de número de Erdős pode ser apresentada da maneira mais sofisticada e assim abrir caminho para questões que a formulação dada atrás não deixa antever.

Um *Grafo*  $G = (V, A)$  consiste num conjunto finito de *vértices* e num conjunto  $A$  de *arcos*, formado por partes de  $V$  com apenas dois elementos.

Dois vértices  $x, y$  são *adjacentes* se  $\{x, y\}$  for um arco. Um *caminho de comprimento*  $K-1$  do vértice  $x$  para o vértice  $y$  é uma seqüência de vértices  $x=v_1, \dots, v_k=y$  em que vértices consecutivos são adjacentes.

A noção de caminho permite introduzir uma relação de equivalência no conjunto  $V$  dos vértices. Escreva-se  $x \sim y$  se existir um caminho de  $x$  para  $y$ . As classes de equivalência que aquela relação origina são as *componentes* do grafo  $G$ .

Uma qualquer componente do grafo  $G$  pode tornar-se um espaço métrico se se definir  $d(x, y)$  como o menor dos

comprimentos dos caminhos que ligam  $x$  a  $y$ .

Considere-se agora o grafo  $G = (V, A)$ , em que  $V$  é o conjunto dos matemáticos, vivos ou mortos, num dado momento e  $\{x, y\} \in A$  se  $x, y$  foram co-autores de um artigo (este é o *Collaboration Graph* a que se refere a epígrafe inicial). Considere-se ainda a componente de  $G$  a que Erdős pertence. O *número de Erdős* do matemático  $x$  é precisamente a sua distância a Paul Erdős. No caso de  $x$  não estar na mesma componente de Erdős então o número de Erdős é  $\infty$  o que, segundo [5],

... is a sign of either independence or nonentity.

Exemplos de questões que se podem formular surgem na secção final de [2], artigo este que desencadeou a presente colaboração. Recomenda-se vivamente a sua leitura bem como a visita à página

<http://www.oakland.edu/grossman/erdoshp.html>

3. Tida como uma boa maneira para iniciar uma conversa numa reunião de matemáticos que se não conhecem bem [5], a pergunta *E o seu número de Erdős qual é?* desperta, penso eu, alguma curiosidade inevitável. Como uma pequena brincadeira indico a seguir alguma coisa sobre números de Erdős no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

Para além de J. Tiago de Oliveira, há, pelo menos, um outro matemático português com número de Erdős 2. Trata-se de J. A. Dias da Silva, da Faculdade de Ciências de Lisboa e Presidente do CIM - Centro Internacional de Matemática<sup>2</sup> e um caminho que o liga a Erdős é

*J. A. Dias da Silva*  $\rightarrow$  *Leroy Beasley*  $\rightarrow$  *Paul Erdős*.

Como J. A. Dias da Silva colaborou com vários colegas meus, números de Erdős menores que ou iguais a 3 são relativamente vulgares no Departamento de Matemática

<sup>2</sup>na altura em que este texto foi escrito, Verão de 1999.

da Universidade de Coimbra. Por exemplo, Eduardo Marques de Sá, Cristina Caldeira, Ana Paula Santana, Graciano de Oliveira estão todos nessas condições.

Por outras vias,

*M. Sobral* → *Jan Reiterman* → *Vojtech Rodl* → *Paul Erdős*  
e

*J. M. Simões Pereira* → *Christina Zamfirescu* → *Zsolt Tuza* → *Paul Erdős*,

Manuela Sobral e J. M. S. Simões Pereira, este um pouco surpreendentemente já que é um especialista em Combinatória, têm também número de Erdős menor que ou igual a 3.

A minha colega Maria Manuel Clementino,

*M. M. Clementino* → *Walter Tholen* → *Jan Reiterman*  
→ *Vojtech Rodl* → *Paul Erdős*,

tem também número de Erdős menor que ou igual a 4.

Já o meu número, embora preze muito a companhia, parece ser desconsoladoramente alto, menor que ou igual a 6, tanto mais que não se conhecem números de Erdős, finitos, superiores a 7 [4]. Um caminho possível é

*F. J. Craveiro de Carvalho* → *S. A. Robertson*  
→ *D. R. J. Chillingworth* → *Jerrold Marsden*  
→ *Martin Golubitsky* → *Bruce Rothschild* → *Paul Erdős*.

4. Como já se refere em [5], os matemáticos podem

ser substituídos por actores, atletas etc. Seria curioso saber se Carlos Lopes possui um número de Carl Lewis (ou Jesse Owens) finito mas, se derem uma espreitadela a

<http://www.cs.virginia.edu/oracle/>,

podem ver logo que o número de Pamela Anderson de Greta Garbo é 3 e que Woody Allen tem número 2 de Groucho Marx, por exemplo.

5. Obrigado aos colegas citados por terem lido, comentado, apanhado gralhas e contribuído com alguns caminhos.

## REFERÊNCIAS:

- [1] - Donald J. Albers and G. L. Alexander, *Mathematical people*, Birkhauser, 1985.
- [2] - Rodrigo de Castro and Jerrold W. Grossman, *Famous trails to Paul Erdős*, *Math. Intelligencer*, volume 21, number 3, 1999.
- [3] - Casper Goffman, *And what is your Erdős number?*, *Amer. Math. Monthly*, volume 76, 1969.
- [4] - Paul Hoffman, *The man who loved only numbers*, Fourth Estate Limited, 1998.
- [5] - Bruce Schechter, *My brain is open*, Oxford University Press, 1998.
- [6] - Jorge Nuno Silva, *Paul Erdős (1913 - 1996)*, *Boletim da S. P. M.*, número 35, 1996.

### A criação do mundo

O ponto não tem dimensões, disse-o o grego, assim descobrindo a geometria que havia antes que houvesse criação: por isso, cego, mas rigoroso, já tudo se construía.