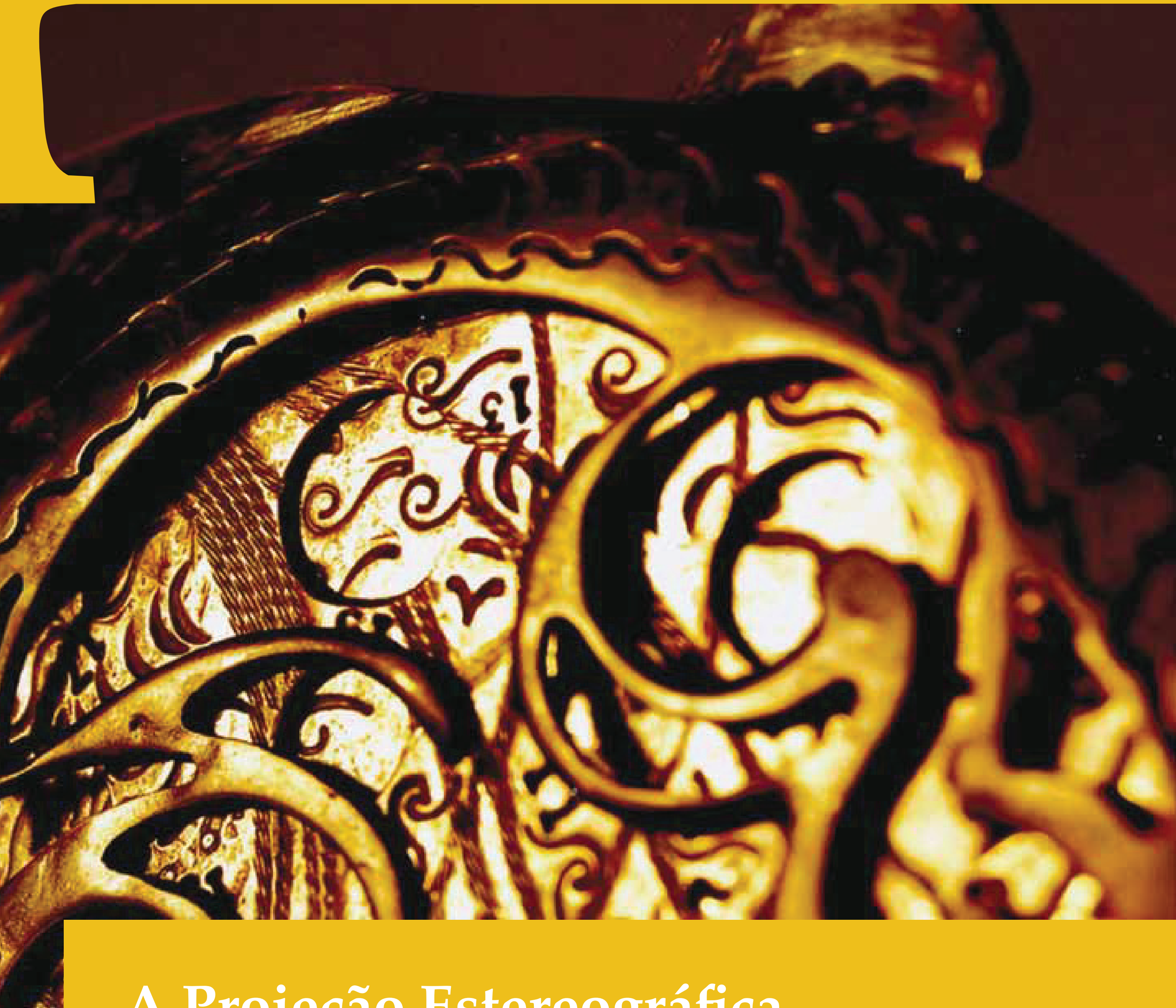


A Projeção Estereográfica e o Astrolábio

Alexandre Mena e Silva
Universidade do Porto
ammmsilva@gmail.com

Se de repente acordássemos num local deserto, sem relógio nem telemóvel, sem sistema de navegação eletrónico à nossa mão e sem ninguém por perto para nos indicar o caminho de volta para casa, o que faríamos numa situação extrema como esta? Teríamos de regressar ao passado e voltar a aprender a olhar as estrelas e a orientarmo-nos por elas. Saber um pouco de projeção estereográfica e ter um astrolábio no bolso poderia também ser muito útil nesta situação.

Em matemática, projetar é o ato que consiste em representar um determinado objeto num plano, denominado plano da projeção. Para fazer uma projeção é necessário escolher um ponto qualquer do espaço para origem da projeção e, a partir desse ponto, fazer passar várias semirretas através do objeto em questão, de forma a que todos os seus pontos pertençam a uma semirreta. Essas semirretas intersetam o plano da projeção num conjunto que constitui a projeção do objeto dado.

Há muitas formas de projetar um objeto no plano, mas existe uma muito particular que, pelas suas propriedades, é muito usada em astronomia, por exemplo. Trata-se da projeção estereográfica, que permite representar num plano figuras que estão sobre a superfície de uma esfera. Escolhe-se um ponto qualquer da esfera para origem da projeção e considera-se como plano da projeção o plano tangente à esfera no ponto diametralmente oposto ao da origem da projeção. No entanto, não é necessário que o plano da projeção seja tangente à esfera: qualquer outro plano que lhe seja paralelo e não passe pela origem da projeção pode desempenhar esse papel, pois com uma qualquer escolha deste tipo as principais propriedades da projeção estereográfica mantêm-se. Entre estas propriedades, consideraremos três muito particulares, que a tornam única em relação às outras formas de projetar. A primeira propriedade da projeção estereográfica estabelece que qualquer círculo inscrito na esfera se projeta como um círculo (se não passar pela origem da projeção) ou como uma reta (se passar pela origem da projeção). A segunda propriedade consiste no fato de que os ângulos entre curvas da superfície esférica são preservados quando essas mesmas curvas são projetadas estereograficamente no plano. A terceira propriedade desta projeção diz que se rodarmos a esfera ao longo do diâmetro que contém a origem da projeção, a projeção dos objetos da superfície esférica também roda em torno do ponto de interseção desse diâmetro com o plano da projeção segundo o mesmo ângulo de rotação.

Este artigo está dividido em três secções. Na primeira, que foi organizada tendo em conta o material exposto em [1],[2],[3] e [9], serão apresentadas a definição de projeção estereográfica e as demonstrações das três propriedades referidas no parágrafo anterior. Na segunda secção, seguindo [1], será feito um breve apontamento histórico da projeção estereográfica e na terceira e última secção falar-se-á das aplicações desta projeção à astronomia, mais propriamente ao astrolábio. A exposição desta secção segue o que foi apresentado em [9].

PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA: DEFINIÇÃO E PRINCIPAIS PROPRIEDADES

Sejam S e α um ponto qualquer da superfície de uma esfera e um plano tangente à esfera no ponto diametralmente a S, ou seja, S', respetivamente. A projeção estereográfica de um ponto $P \neq S$ pertencente à esfera é o ponto P' que resulta da interseção da reta SP com o plano α.

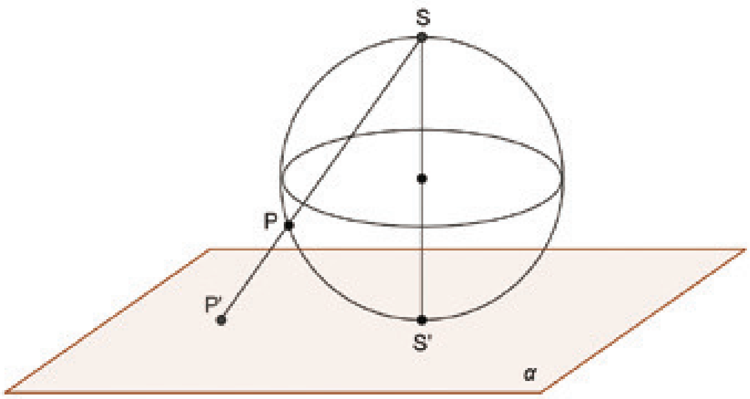


Figura 1: Definição de projeção estereográfica

A projeção estereográfica, como já foi referido anteriormente, é dotada de três propriedades que a tornam peculiar e útil na medida em que tem aplicações em variadas áreas do conhecimento como, por exemplo, em astronomia. Apresentamo-las de seguida dividindo a primeira propriedade em duas partes (A e B) para facilitar a exposição.

- Propriedade A: Círculos na superfície esférica que passem pela origem (ponto S) projetam-se como retas no plano (α);
- Propriedade B: Círculos na superfície esférica que não passem pela origem são projetados como círculos no plano;
- Propriedade C: Ângulos entre curvas da superfície esférica são preservados quando essas mesmas curvas são projetadas no plano.
- Propriedade D: Quando a esfera roda em torno do eixo SS', os objetos projetados no plano α vão também sofrer uma rotação de centro em S' com a mesma amplitude.

É fácil de verificar que a propriedade A é verdadeira. Basta para isso reparar que qualquer ponto que fique sobre um círculo que passe por S, digamos C, vai gerar um conjunto de retas (que passam por S e por cada um dos pontos de C) que pertencem ao plano definido por C. Como a interseção de dois planos é uma reta, a projeção do círculo C é a reta que resulta da interseção do plano definido por C com o plano α.

Para demonstrar a propriedade B começamos por observar que, dado um círculo C da superfície esférica que não passe por S, todas as retas da projeção que saem de S e passam por todos os pontos do círculo formam um cone circular com vértice em S. O círculo C pode ser obtido como secção desse cone com o próprio plano que contem C, e a sua projeção, C', é a secção desse cone com o plano de projeção. No que se segue iremos demonstrar que C' é um círculo no plano de projeção provando e utilizando um resultado que identifica as secções circulares de um cone circular. Na verdade, se o circulo C for paralelo ao plano de projeção, o cone definido pelas retas de projeção e por C é um cone circular reto, e um argumento direto que utiliza semelhanças de triângulos permite concluir que C' é um círculo. Mas, no caso geral, esse cone é oblíquo, e os argumentos tornam-se mais elaborados.

Iniciamos então a prova de B enunciando um resultado auxiliar:

Lema: *Sejam* M *e* N *dois pontos de um círculo inscrito na esfera e* M′ *e* N′ *a projeção estereográfica de* M *e* N *respetivamente. Então* $S\hat{M}N = S\hat{N}'M'$ *e* $S\hat{N}M = S\hat{M}'N'$. (ver figura 2)

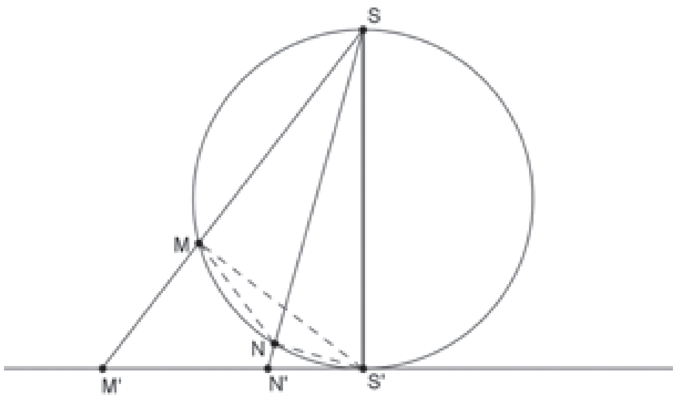


Figura 2: $S\hat{M}N = S\hat{N}'M'$ e $S\hat{N}M = S\hat{M}'N'$

De facto, os triângulos $[SMS']$ e $[SS'M']$ são semelhantes porque são ambos retângulos e têm o ângulo MSS' em comum logo:

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{SS'}} = \frac{\overline{SS'}}{\overline{SM'}} \leftrightarrow \overline{SM} \times \overline{SM'} = (\overline{SS'})^2.$$

Os triângulos $[SNS']$ e $[SS'N']$ também são semelhantes por serem retângulos e terem o ângulo NSS' em comum. Logo, seguindo um raciocínio análogo ao anterior, a seguinte igualdade $\overline{SN} \times \overline{SN'} = (\overline{SS'})^2$ também é verdadeira.

Assim, $\overline{SM} \times \overline{SM'} = \overline{SN} \times \overline{SN'}$, ou seja,

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{SN'}} = \frac{\overline{SN}}{\overline{SM'}}$$

Desta última equação conclui-se que os triângulos $[SMN]$ e $[SN'M']$ são semelhantes e têm um ângulo em comum, o ângulo MSN, logo $S\hat{M}N = S\hat{N}'M'$ e $S\hat{N}M = S\hat{M}'N'$, que era o que se pretendia provar.

Voltando à propriedade B, se o círculo não passar pela origem da projeção, então podemos assumir que o plano que passa por SS' e pelo centro do círculo dado, é o plano SMN onde $[MN]$ é um diâmetro do círculo que pretendemos projetar (ver figura 2). Como já foi mencionado anteriormente, todas as retas da projeção que saem de S e passam por todos os pontos do círculo formam um cone circular com vértice em S.

Enquanto que num cone reto só é possível obter secções circulares fazendo cortes paralelos à base, num cone oblíquo (cone cujo vértice não está verticalmente oposto ao centro da base) existem duas formas distintas de se obter secções circulares. Uma delas é, tal como no cone reto, fazendo cortes paralelos à base. Para obter a segunda forma é necessário recordar o seguinte facto: dado um círculo de diâmetro $[AB]$, se $[CD]$ for perpendicular a $[AB]$ onde C é um ponto arbitrário desse círculo, e $D \in [AB]$ (ver figura 3), então a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\overline{AD} \times \overline{DB} = \overline{CD}^2 \tag{1}$$

Reciprocamente, se a igualdade anterior for verdadeira então C pertence a um círculo de diâmetro $[AB]$.

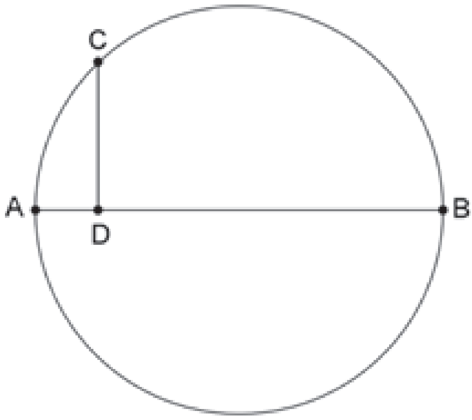


Figura 3: $\overline{AD} \times \overline{DB} = \overline{CD}^2$

Consideremos agora um cone circular oblíquo tendo o ponto A como vértice e $[BC]$ como diâmetro da base. Vamos assumir que a reta BC passa pelo pé da perpendicular do ponto A em relação à base, tal como mostra a figura 4.

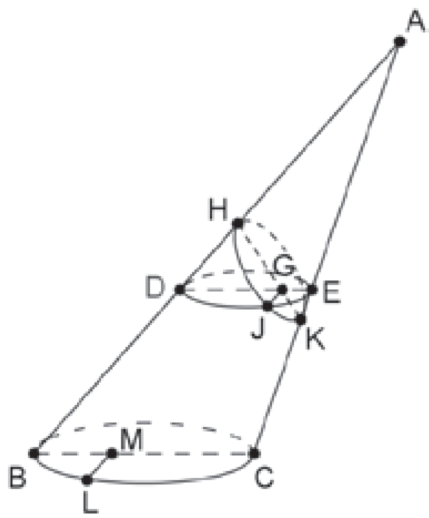


Figura 4: Cone oblíquo

De seguida, secciona-se o cone, através de um plano normal ao plano ABC, ao longo da reta HK, com H e K a pertencerem à superfície do cone, e de modo a que $A\hat{H}K = A\hat{C}B$ e $A\hat{K}H = A\hat{B}C$. A secção obtida vai ser a curva HJK.

Queremos provar que a curva HJK é um círculo e assim obter a segunda forma de seccionar um cone oblíquo de modo a obter um círculo.

Assim, considere-se um ponto qualquer J da curva HJK e um ponto qualquer L da circunferência da base do cone. Desenham-se os segmentos $[JG]$ e $[LM]$ perpendiculares ao plano ABC. Como estes dois segmentos são perpendiculares a ABC então vão ser paralelos entre si.

De seguida desenha-se o segmento $[DE]$ a passar por G e paralelo a $[BC]$ e constrói-se a secção do cone gerada pelo plano que passa por $[DE]$ e $[JG]$. Esta secção vai ser paralela à base do cone porque $[DE]$ é paralelo a $[BC]$ e $[JG]$ é paralelo a $[LM]$, logo trata-se de um círculo (círculo DJE).

Pela propriedade (1), a seguinte igualdade é verdadeira para o círculo DJE:

$$\overline{DG} \times \overline{GE} = \overline{JG}^2 \tag{2}$$

Por outro lado, como $A\hat{H}K = A\hat{C}B = A\hat{E}D$ (pois $[DE] // [BC]$) e $A\hat{K}H = A\hat{B}C = A\hat{D}E$ (pela mesma razão), temos que $H\hat{D}G = E\hat{K}G$ e $D\hat{H}G = K\hat{E}G$. Destas igualdades conclui-se que os triângulos $[EGK]$ e $[HGD]$ são semelhantes.

Assim,

$$\frac{\overline{HG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{GK}} \leftrightarrow \overline{GD} \times \overline{GE} = \overline{HG} \times \overline{GK}.$$

Pela equação (2) obtemos

$$\overline{HG} \times \overline{GK} = \overline{JG}^2 \tag{3}$$

Como a equação (3) é da mesma forma da equação (1) e esta igualdade é válida para qualquer ponto da curva HJK e qualquer segmento HK, conclui-se que a curva HJK é um círculo.

Todas as secções do cone paralelas a HJK vão também ser secções circulares

Para concluirmos, e com referência à figura 2, aplicamos o resultado que acabámos de demonstrar tomando, por exemplo, o círculo C como base do cone de projeção e tomando uma secção do cone, digamos C'', obtida com um plano paralelo ao plano de projeção e que corte o cone acima do ponto M. Pelo que foi provado acima, C'' será um círculo, e logo também o será C', sendo uma secção paralela a C'' do mesmo cone.

De seguida vamos demonstrar a propriedade C, de que os ângulos entre curvas da superfície esférica são preservados quando essas curvas são projetadas estereograficamente no plano. O ângulo entre duas curvas de uma superfície esférica define-se como sendo o ângulo entre as tangentes a essas curvas no ponto onde elas se intersetam.

Assim, sejam t_1 e t_2 retas tangentes à esfera num ponto P e α o ângulo entre elas. Sejam t'_1 e t'_2 as projeções de t_1 e t_2 respetivamente e α' o ângulo formado por elas (ver figura 5). Queremos provar que $\alpha = \alpha'$.

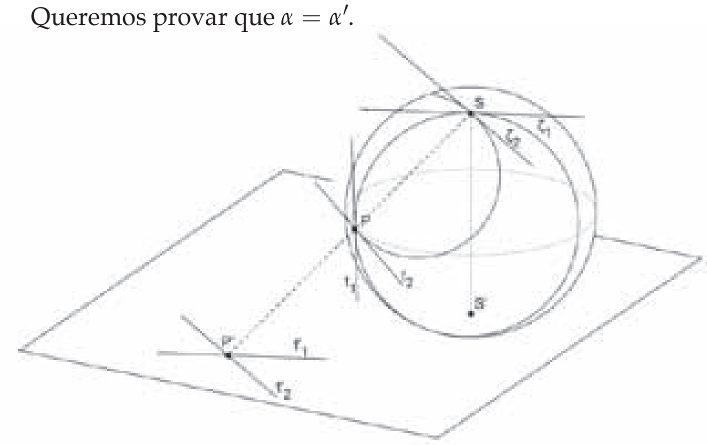


Figura 5: Conservação dos ângulos

A interseção do plano formado pelas semirretas com origem em S e que passam todos os diferentes pontos de t_1 com a esfera é um círculo que passa por S, então t_1 projeta-se na t'_1 que passa por P' (projeção estereográfica de P). τ_1, a tangente ao círculo em S, é paralela a t'_1 porque todas as tangentes em S são paralelas ao plano da projeção. Analogamente, o plano definido por t_2 e S interseta a esfera noutro círculo que passa por S e tem a tangente τ_2 que é paralela a t'_2. Então, o ângulo α' entre t'_1 e t'_2 é igual ao ângulo entre τ_1 e τ_2 (porque os lados dos ângulos são paralelos dois a dois), que por sua vez é igual a ângulo entre t_1 e t_2, porque os ângulos entre os dois círculos da superfície esférica nos pontos de interseção P e S são iguais. Para nos convencermos deste facto, chegará observar que o plano que corta perpendicularmente o segmento PS no seu ponto médio é plano de simetria para os dois círculos. Logo, $\alpha = \alpha'$ como queríamos provar.

Por fim, em relação à propriedade D, a sua veracidade pode ser facilmente demonstrada se reparamos no fato de que a projeção M' de qualquer ponto M da esfera é um ponto pertence a um plano que passa por SS' e quando a esfera roda φ°, a reta relativa à interseção desse plano com o plano da projeção também roda φ°, ou seja M rodou φ° em torno do eixo SS'.

UM POUCO DE HISTÓRIA...

A referência mais antiga da projeção estereográfica remonta à obra de Ptolomeu *Planisphaerium*. Ptolomeu foi um cientista grego do séc. II a.C. e que descreveu, nesta obra, um instrumento que conseguia determinar as coordenadas das estrelas. Esse instrumento, que era o astrolábio, utilizava a projeção estereográfica na sua construção. As propriedades desta projeção referidas anteriormente estão enunciadas na obra *Planisphaerium* mas sem as respetivas demonstrações.

A demonstração mais antiga e completa das propriedades A e B da projeção estereográfica foi escrita por Ahmad Al-Fergani, um cientista do séc. IX nascido em Fergana (Ásia Central) e que trabalhou em Baghdad. No capítulo I da sua obra *Construindo o Astrolábio* é-nos apresentada a teoria da projeção estereográfica. O Lema e as propriedades A e B apresentados neste artigo estão na obra de Al-Fergani. A demonstração da proposição B de Al-Fergani é muito parecida com a demonstração da 5ª proposição do tratado sobre cónicas de Apolónio de Perga, geómetra grego da escola de Alexandria do Séc. III d.C., onde se descreve o segundo conjunto de secções circulares de um cone oblíquo.

Na Idade Média, a projeção estereográfica era conhecida como a "projeção do astrolábio". O termo "projeção estereográfica" foi utilizado pela primeira vez por um jesuíta chamado François d'Aguilon no início do séc. XVII. A palavra estereográfica deriva do grego e é a junção das palavras: sólido e desenho, ou seja, é a geometria que desenha sólidos (no plano).

O ASTROLÁBIO

O astrolábio é um instrumento astronómico que resolve problemas relacionados com o a medição do tempo e com a posição do Sol e das estrelas. O nome "astrolábio" vem do grego *aster*, que significa estrela, e *lambanein*, que possui vários significados: tomar, capturar, colher, apreender, compreender. Juntando as duas palavras, astrolábio significa compreender as estrelas.

O astrolábio é portátil, achatado e de forma circular, com cerca de 15 cm de diâmetro, no entanto esta dimensão pode variar. O corpo principal deste instrumento chama-se madre. A madre é composta por duas partes: um disco sólido, que define a parte de trás do astrolábio e um anel graduado à volta da madre, chamado rodela, com o mesmo diâmetro da madre e que define a parte da frente.

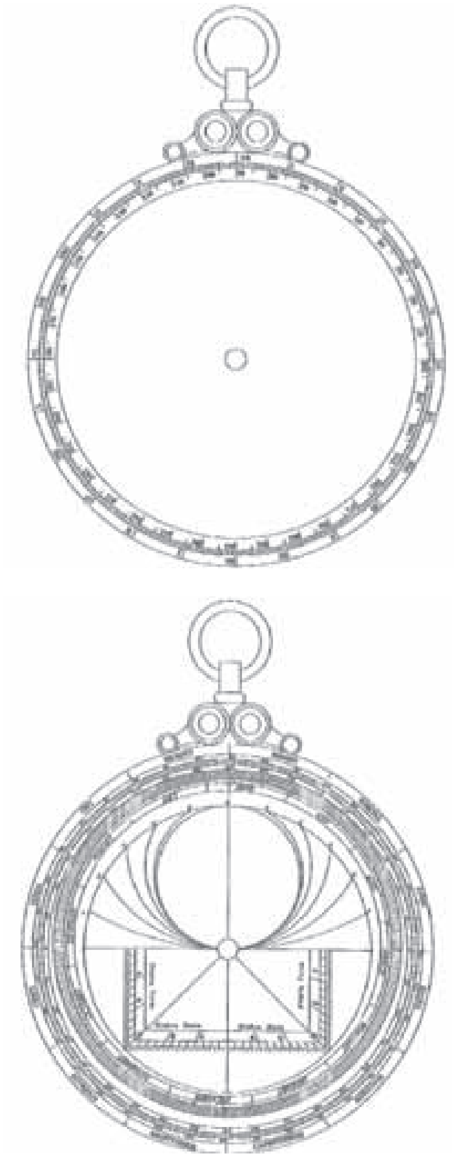


Figura 6: Em cima, a frente de uma madre.
Em baixo, a parte de trás.

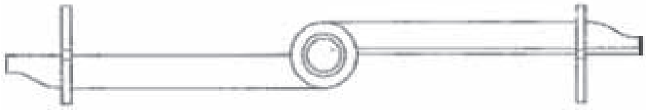
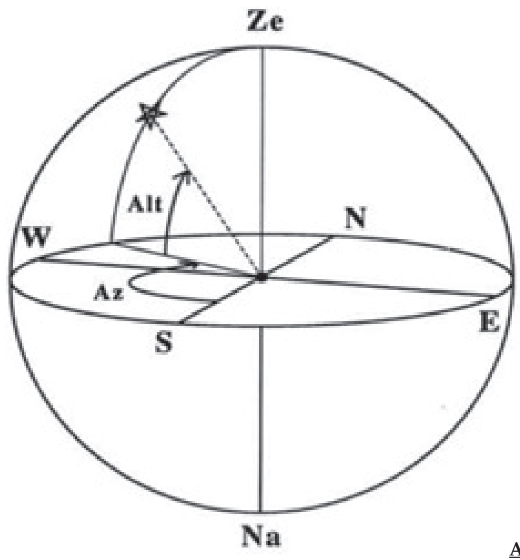


Figura 7: Alidade



LEGENDA
Ze- Zénite
Na- Nadir
Alt- Altura
Az- Azimute

Figura 8: Sistema horizontal de coordenadas

Outra componente muito importante do astrolábio é a alidade (figura 7). A alidade girava em torno do centro do astrolábio (centro da madre) e servia para encontrar a altura dos astros, ou seja, a amplitude do ângulo que o corpo celeste faz com o plano do horizonte (plano tangente à Terra no ponto onde o observador se encontra).

Para identificar um objeto na esfera celeste (considera-se que o céu é uma enorme esfera sobre a qual estão fixadas as estrelas e tem como centro a Terra), é necessário definir um sistema de coordenadas. Um dos mais utilizados por aqueles que observam os céus é o *Sistema Horizontal de Coordenadas*, figura 8 (para mais pormenores, ver [7]). Este sistema de coordenadas é composto pelo plano do horizonte e pelo eixo perpendicular ao plano e que passa pelo zénite (ponto da esfera celeste que está verticalmente acima do observador) e pelo nadir (ponto diametralmente oposto ao zénite). A orientação deste eixo é no sentido nadir – zénite. A origem do sistema horizontal é o ponto cardeal sul orientado no sentido da rotação dos ponteiros do relógio.

Com este sistema são necessários apenas dois ângulos, ou seja, duas coordenadas, para definir inequivocamente um ponto da esfera celeste. A primeira coordenada é a *altura* e a segunda denomina-se por *azimute* (amplitude do ângulo medido horizontalmente entre o ponto cardeal sul e o objeto celeste).

A primeira coordenada é obtida através do astrolábio segurando-o na vertical por um anel e fazendo alinhar a alidade com o corpo celeste. Depois da alidade estar alinhada fazemos a leitura da altura através da rodela presente na madre.

A segunda coordenada descobre-se através da parte de trás da madre. Nesta é fixado um disco que gira em torno do centro denominado lâmina. A lâmina possui vários círculos desenhados que são a projeção estereográfica do equador celeste (círculo que se obtém intercetando o plano definido pelo equador terrestre e a esfera celeste); dos trópicos de Câncer e Capricórnio celestes, que são dois círculos paralelos ao equador celeste e tangentes à eclíptica (círculo que é descrito pelo movimento aparente do Sol ao longo do ano); do horizonte (círculo que se obtém intercetando o plano do horizonte e a esfera celeste) e das almucântaras (círculos da esfera celeste paralelos ao horizonte). A lâmina possui também a projeção estereográfica do zénite e dos azimutes (círculos perpendiculares ao horizonte e que passam pelo zénite).

Pelas propriedades A e B, estes círculos da esfera celeste projetam-se como círculos ou segmentos de reta. Por norma, o pólo sul celeste é escolhido para origem da projeção, e o plano do equador para plano da projeção logo, o equador e os trópicos são desenhados na lâmina através de círculos concêntricos. O Trópico de Capricórnio é o círculo que delimita a lâmina do astrolábio. Os azimutes são projetados como círculos que passam pelo zénite e são perpendiculares ao horizonte.

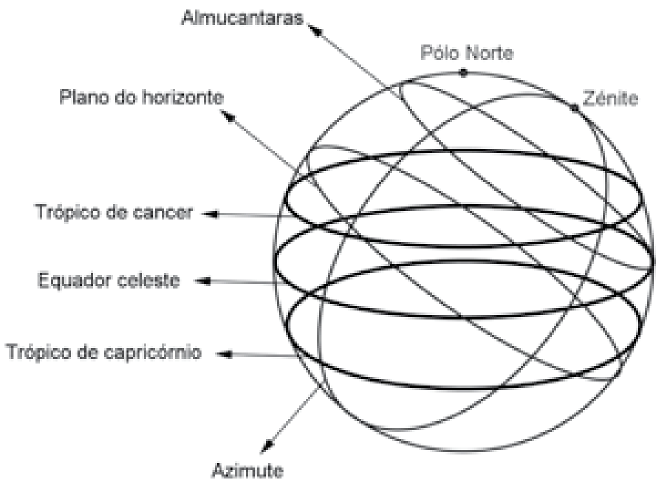


Figura 9: Esfera celeste e os seus principais elementos.

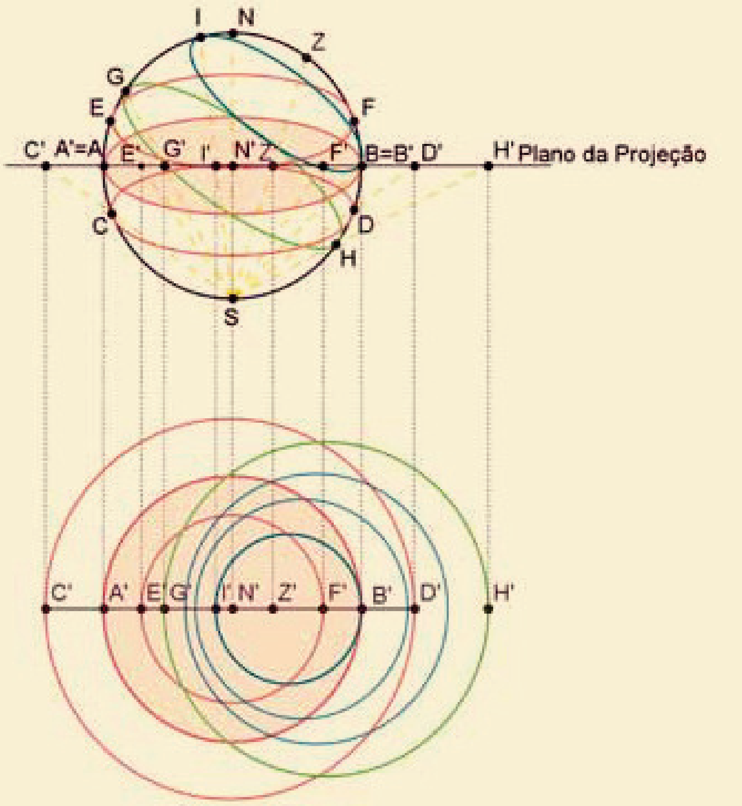


Figura 10: Construção da lâmina de um astrolábio. Alguns elementos da esfera celeste (figura acima) são projetados estereograficamente em círculos da mesma cor no plano equatorial (figura abaixo). Em particular, o plano do horizonte tem cor amarela, a almucântara tem cor verde (no plano de projeção são representadas mais duas almucântaras que não foram desenhadas na figura acima para não tornar o desenho demasiado complicado). Por fim, o equador e os trópicos têm cor violeta. O plano da projeção é, por conveniência gráfica, o plano equatorial paralelo ao plano tangente à esfera no polo norte celeste N. Como observado na introdução, as propriedades da projeção estereográfica continuam a ser válidas.

Na lâmina ainda podemos encontrar as linhas horárias que servem para determinar as horas e são traçadas por de baixo do horizonte.

Por cima da lâmina encaixa-se a rede, um disco circular, o mais entalhado possível para deixar ler as indicações da lâmina que se encontram por baixo. A rede dava a projeção da eclíptica (que se encontra dividida em doze partes iguais que são as constelações do zodíaco) e das estrelas fundamentais com os respetivos nomes. A eclíptica aparece projetada tangente aos trópicos.

Com o astrolábio apenas é possível determinar os azimutes das estrelas que estão representadas na rede. Depois de se obter (através da alidade) a altura de uma determinada estrela, roda-se a rede em cima da lâmina até que esta (que está representada na rede) fique em cima da almucântara com a mesma altura. É a propriedade *D* que nos permite fazer esta rotação da rede. Após esta operação determina-se a posição exata da estrela no céu, ou seja, as suas coordenadas pois, basta ver para que azimute está a rede a apontar.

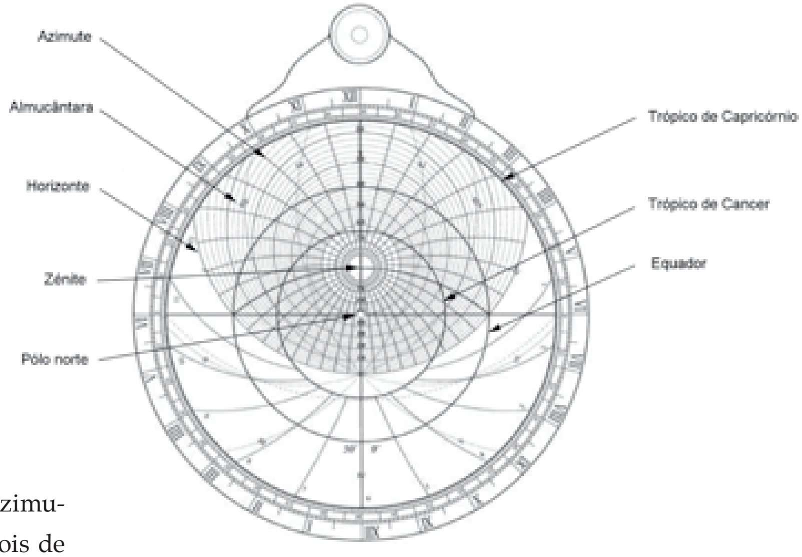


Figura 11: Lâmina do astrolábio

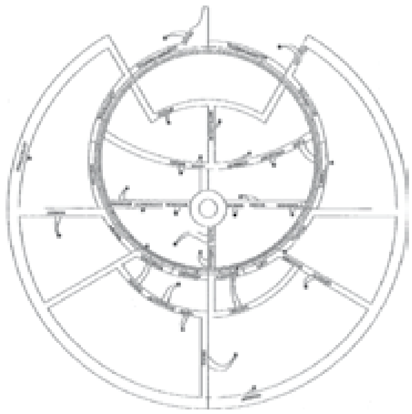


Figura 12: Rede

BIBLIOGRAFIA

[1] ROSENFELD, A.B.; SERGEEVA, A.D. (1977), *Stereographic Projection*, Mir Publishers Moscovo, tradução de Vitaly Kisin.

[2] THOMSON, Ron B. (1978), *Jordanus de Nemore and the Mathematics of Astrolabe: De Plana Spera*, Toronto, Pontifical Institute of Mediaeval Studies.

[3] MORRISON, James E. (2007), *The Astrolabe*, USA, Janus.

[4] JOHN, Locke (2003), *Understanding the Astrolabe*, First Edition, Brabourne Books.

[5] TARDY, Jean-Noël (1999), *Astrolabes, Cartes du ciel les comprendre et les construire*, Aix-en-Provence, Édisud.

[6] COTTER, Charles H. (1992), *The Elements of Navigation and Nautical Astronomy*, Brown, Son & Ferguson Ltd, Glasgow.

[7] VELOSO, Eduardo (1991), "Algumas noções elementares de astronomia"; Série: *Descobrimentos, Astronomia e Educação Matemática* Nº1; 1ª Edição; APM; 1991.

[8] JAMIESON, Laura; MONTERO, Maria; *Stereographic Projection, Chaucer and the Astrolabe. http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m309-01a/montero/math-309project.html.*

[9] SILVA, Alexandre (2011), Projecção Estereográfica Propriedades e Aplicações, Tese de Mestrado em Matemática para Professores, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

SOBRE O AUTOR

Alexandre Mena e Silva é professor do 3.º ciclo e secundário do Colégio de S. Tomás em Lisboa. Licenciou-se em Ensino da Matemática pela Faculdade de Ciência da Universidade de Lisboa, em 2002, e concluiu em 2011, também nesta universidade, o Mestrado em Matemática para Professores. Este artigo surge na sequência da sua dissertação "Projecção Estereográfica, Propriedades e Aplicações" no âmbito do mestrado sob orientação do Prof. Doutor Henrique de Sousa Leitão.