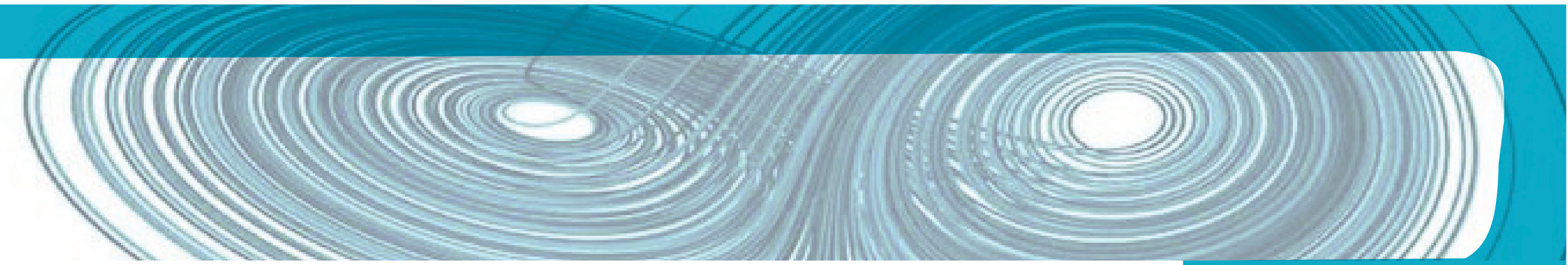


ATRACTOR

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site *www.atractor.pt* . Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

JOGOS ISOMORFOS

Neste artigo, propomos ao leitor uma versão luminosa do jogo das torres de Hanói.

Imaginemos um jogo formado por uma fila de lâmpadas, em que cada lâmpada pode estar num de dois estados: acesa ou apagada.

Figura 1

Clicando numa delas, ou só essa muda de estado, ou ficam todas no estado em que estavam. Qual das duas ocorrências tem lugar, dependerá, segundo uma regra precisa, do estado das lâmpadas da fila. Aconselhamos o leitor a que tente descobrir essa regra por si mesmo, experimentando com um modelo virtual do jogo, disponível em [1]. Para usar esse modelo, o *browser* deverá ter o *plugin* Mathematica Player, que poderá ser importado de [2]. Se o leitor não desejar fazer esse exercício, deve ler agora, no final[1] do texto, o enunciado da regra. Conhecida essa regra, considere-se o seguinte problema[2]: para uma fila com n lâmpadas todas apagadas, será possível, utilizando cliques adequados, conseguir que apenas a última lâmpada fique acesa? Se for, qual o número mínimo de cliques a usar? E haverá apenas uma, ou mais do que uma, sucessão de cliques com o número mínimo, que cumpra esse objetivo? O leitor poderá utilizar o jogo virtual para vários valores de n, procurando gastar o número mínimo de cliques.

Decorre da regra geral que, se as primeiras $n-1$ lâmpadas estiverem apagadas, os mesmos cliques que acendem a lâmpada n (se estava apagada), também a apagam (se estava acesa).

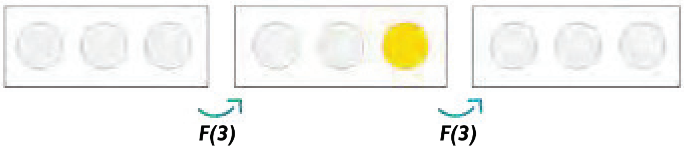


Figura 2

Designe $F(n)$, para cada n, uma sucessão de cliques de comprimento mínimo que, aplicada a uma fila de n lâmpadas das quais as primeiras $n-1$ estão apagadas, só muda o estado da lâmpada n. E designe $f(n)$ o número de cliques de $F(n)$. Partindo de uma fila de n lâmpadas apagadas, só se conseguirá acender a lâmpada n quando, entre as anteriores, apenas esteja acesa a de ordem $n-1$; e consegue-se chegar a esse estado, usando precisamente os cliques de $F(n-1)$, em número de $f(n-1)$. Clicando depois na lâmpada n, ficarão apenas acesas as lâmpadas $n-1$ e n; e com $F(n-1)$ apagar-se-á a lâmpada $n-1$. Portanto, $F(n) = F(n-1) \times (n) \times F(n-1)$ e $f(n) = 2f(n-1) + 1$.

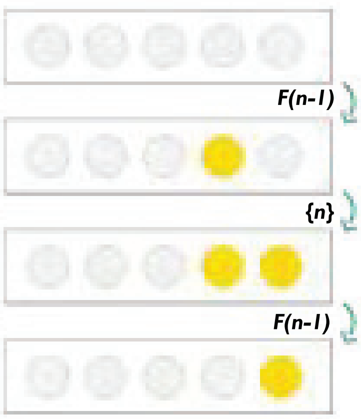


Figura 3

Notando que $F(1)=\{1\}$ (um clique na 1ª lâmpada acende-a) e $f(1)=1$, temos $F(n)$ e $f(n)$ definidos por recorrência, e a unicidade de F fica também estabelecida. E, como a função g definida por $g(n) = 2^n-1$, satisfaz também a $g(1)=1$ e a $g(n)=2g(n-1)+1$, será $f=g$.

Ao jogar este jogo, ocorre imediatamente pensar num outro, cuja estrutura de resolução é muito semelhante – o popular jogo das Torres de Hanói. Lembremos rapidamente as regras: num tabuleiro com três hastes e discos de raios todos diferentes, pode-se, de cada vez, mudar o disco de cima de uma haste para outra haste, desde que nunca se coloque um disco qualquer sobre outro mais pequeno. Partindo de uma pilha de discos (de diâmetros decrescentes) numa das hastes e nenhum disco nas outras duas, quer-se transportar aquela pilha para outra haste previamente fixada. Como o fazer num número mínimo de jogadas? O jogo é trivial quando a pilha só tem um disco. E, se já o soubermos resolver para uma pilha de $n-1$ e tivermos uma de n, poderemos transferir os $n-1$ discos de cima para a haste diferente da inicial e da final, depois mudar o disco maior para a final e novamente transportar a pilha dos anteriores $n-1$ para cima do disco maior. De notar apenas que, como os $n-1$ discos são todos mais pequenos do que o maior de todos, os movimentos "permitidos" são os mesmos, quer uma haste esteja vazia, quer já lá tenha o maior (ver figura 4, em que $n = 4$, a coluna inicial é a de baixo e a final é a da direita). O processo e a conclusão são análogos aos do jogo anterior.

Constatada esta semelhança entre as resoluções dos dois problemas, é natural procurar levá-la um pouco mais longe. Será que podemos estabelecer uma correspondência natural entre os dois jogos e os respetivos passos de resolução? Isto é, quereríamos estabelecer uma correspondência biunívoca natural entre o conjunto das diferentes distribuições possíveis dos n discos das torres de Hanói pelas três hastes e as diversas distribuições de "*acesas e apagadas*" numa fila de n lâmpadas, de modo que:

1. Os discos estivessem todos na haste inicial se e só se as lâmpadas estivessem todas apagadas;

2. Os discos estivessem todos na haste final se e só se apenas a última lâmpada estivesse acesa;

3. A um movimento permitido de uma haste para outra correspondesse o mesmo efeito que teria um clique na fila de lâmpadas (que provocasse mudança de estado de uma lâmpada) e vice-versa.

Sob esta forma, é fácil concluir que o problema não tem solução: não existe uma tal correspondência biunívoca. Basta notar

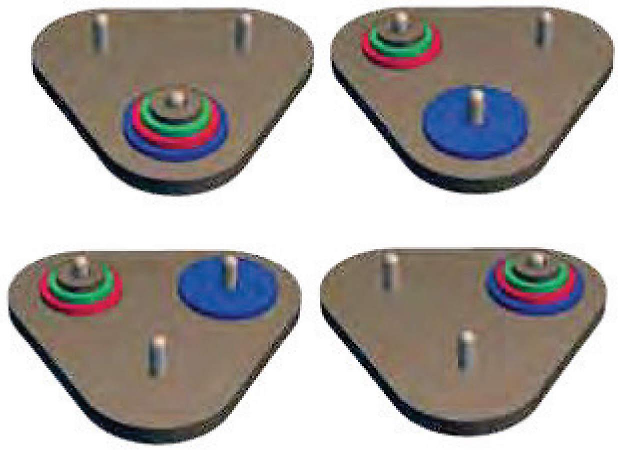


Figura 4

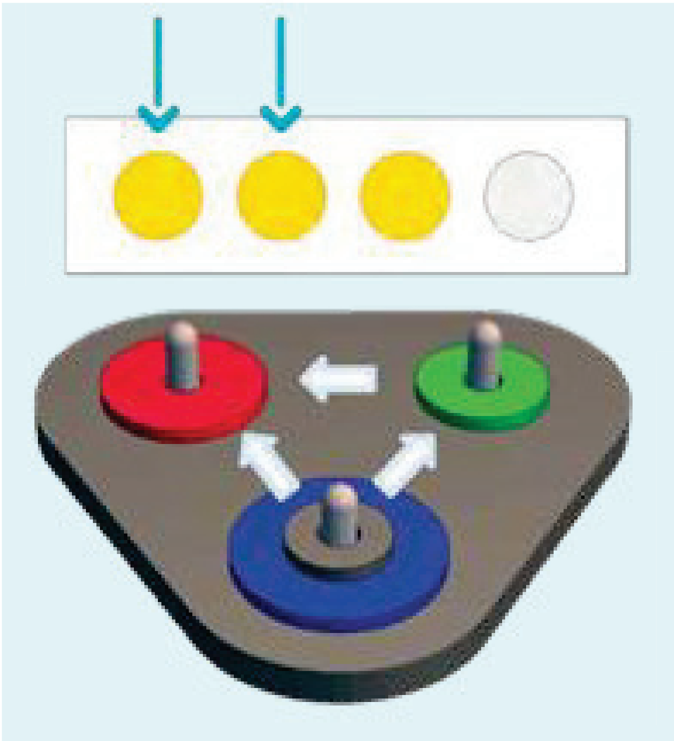


Figura 5

que, em cada jogada, o número de possibilidades de mudar de configuração não é o mesmo nos dois jogos. No caso das torres de Hanói, quando todos os discos estão numa mesma haste (três casos possíveis), há duas jogadas possíveis: o disco mais pequeno pode ir para qualquer das duas hastes vazias. E em todos os outros casos, além das duas jogadas com o disco mais pequeno – que está sempre em cima numa haste – há outra, de outro disco: se houver uma haste vazia, é o movimento para ela do disco em cima da haste que não contém o disco mais pequeno; se não houver, é o movimento entre as hastes que não têm o disco mais pequeno, que envia o menor dos dois discos para cima do maior. No jogo das lâmpadas, há dois casos: se todas as lâmpadas estiverem apagadas ou apenas a última estiver acesa, só há um clique com efeito visível: na primeira lâmpada; em todos os outros casos, além do clique na primeira lâmpada, há o clique na lâmpada a seguir à primeira que estiver acesa (figura 5). Portanto, neste jogo duas jogadas são possíveis, excetuando duas situações em que há apenas uma; enquanto no outro jogo há três jogadas possíveis, excetuando três situações, em que há apenas duas. Relativamente ao jogo das lâmpadas, notemos que, no caso geral, dos dois cliques possíveis, um deles é o mesmo que o anterior e, portanto, repõe o estado anterior. Ora, numa procura de como resolver o jogo no menor número de cliques possível, a repetição do clique anterior nunca deve ser feita. Mas, excluindo essa repetição, os cliques ficam determinados de maneira única: isto é, a boa estratégia para resolver o jogo no menor número de cliques consiste apenas em escolher, desde o início, o único clique disponível, que, a partir da segunda jogada, não desfaça a jogada anterior.

Para exprimir de um modo simples uma estratégia com o mínimo número de movimentos no caso do jogo das torres de Hanói, é cómodo ter discos alternadamente de uma cor clara e outra escura. Deixa-se ao leitor a verificação de que a maneira mais rápida de concluir a transferência de uma haste para outra consiste em nunca pôr um disco diretamente sobre outro de tonalidade idêntica. Isto determina o movimento a fazer quando não há hastes vazias. Para incluir os casos de hastes vazias na regra indicada, bastará imaginar no tabuleiro-base três discos virtuais (figura 6), os das hastes de partida e de chegada com tonalidade diferente da do disco maior e o da haste restante com a mesma tonalidade do disco maior. Entre as posições indicadas na figura 7, foram omitidas, respetivamente 1, 1, 2, 3 e 3 posições intermédias, no total de dez, ou seja, estão mostradas seis das dezasseis.

Com estas convenções quanto às jogadas, é muito fácil encontrar a estratégia ótima: basta nunca desfazer a jogada anterior! E isso equivale a que as jogadas sejam alternadamente do disco mais pequeno e de outro. Quer dizer: este jogo das torres de Hanói de regras mais exigentes acaba por ser mais fácil do que o de regras mais permissivas. O paradoxo é aparente: as novas regras impedem que o jogador se perca em caminhos mais longos... Estamos, pois, com esta versão, numa situação idêntica à do jogo das lâmpadas, o que nos deixa esperança de conseguirmos encontrar a equivalência entre esta versão do jogo das torres de Hanói e o das lâmpadas. Para definirmos a correspondência, comecemos por imaginar os n discos da pilha numerados por ordem crescente dos respetivos raios de 1 a n; o círculo virtual na base da haste de partida com um raio um pouco maior do que o disco n, o maior da pilha, será visto como o disco $n+1$. Quanto aos outros dois discos virtuais do tabuleiro, serão ainda maiores, chamemos-lhes $n+2$ e $n+3$. Com esta convenção, poderíamos tentar definir a correspondência que procuramos, pela seguinte regra muito simples: *a lâmpada* k *está apagada se e só se o disco* k *estiver pousado diretamente sobre o disco* k+1.

Verifiquemos as três propriedades enunciadas acima. Comecemos pela primeira: os discos estão todos na haste inicial 1

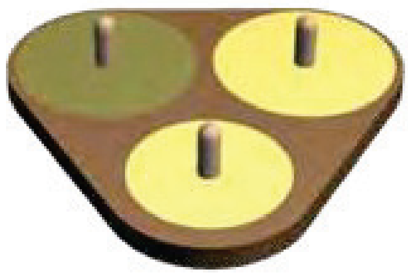


Figura 6

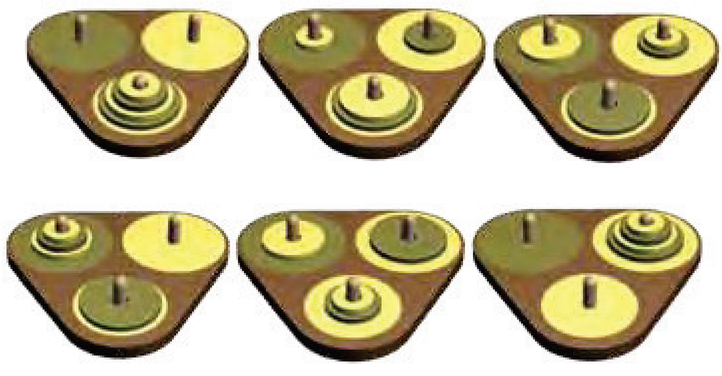


Figura 7

se e só se cada disco, incluindo o n, estiver sobre o disco de número imediatamente seguinte, portanto se e só se as lâmpadas estiverem todas apagadas. Quanto à segunda: todos os discos estarem numa haste diferente da inicial equivale a só o disco n não estar sobre o seguinte maior, o que por sua vez equivale a só estar a lâmpada n acesa. Mas só há uma possibilidade de obter esta configuração: todos os discos estarem na haste final – aquela que tem um disco de tonalidade oposta à do maior e não é o de ordem $n+1$.

Observe-se ainda que ao longo do jogo se mantém a repartição inicial das cores dos discos de cima: a cor do disco mais pequeno e, em cada uma das outras duas hastes, um de cada cor. A razão é que um movimento permitido muda para a cor oposta à dele a cor do disco no topo da haste de onde saiu e muda para a cor dele a cor do disco no topo da haste para onde foi.

Vejamos agora a terceira condição. O único disco que pode eventualmente estar em cima do segundo é o mais pequeno, ou seja, o primeiro; e, se não estiver nenhum, o segundo será o único disco de cor diferente do primeiro que está no cimo de uma haste. Portanto, quando o disco mais pequeno se move, ou vai para cima do segundo ou sai de cima do segundo. No primeiro caso, a primeira lâmpada apaga-se, no segundo, acende-se. Isto é, qualquer movimento do disco 1 corresponde a clicar na lâmpada 1 (e vice-versa). Este tipo de raciocínio estende-se aos restantes discos. Suponhamos que não é o disco 1 que se move; será o disco j em cima das outras hastes que for mais pequeno (eles têm cores diferentes). Não haverá nessas duas hastes nenhum disco mais pequeno do que o disco j, portanto todos eles estarão na haste do primeiro disco, isto é, se $j>2$ as lâmpadas de 1 a $j-2$ estarão todas apagadas; em qualquer caso, a lâmpada $j-1$ estará acesa. Quanto ao disco $j+1$, ou está (imediatamente) por baixo do disco j ou é o do topo da outra haste. No primeiro caso, ao mover o disco j, a lâmpada j passa de apagada a acesa; no segundo caso, passa de acesa a apagada. Em ambos os casos, essa ação corresponde a um clique na lâmpada j, estando $j-1$ acesa e todas as anteriores apagadas. Esta argumentação pode ser apresentada em sentido inverso para qualquer clique numa lâmpada, no caso de haver mudança de estado. Na figura 8, é $j=2$ e o último movimento foi do disco mais pequeno, correspondendo a um clique na primeira lâmpada, que a acendeu; portanto, o disco j vai para cima do disco $j+1$ e a lâmpada j apaga-se. Os outros casos de clique não mudam o estado das lâmpadas: correspondem ao disco $j+1$ ou a discos que não estão no topo das hastes e não podem, pois, ser movidos. Portanto, fica estabelecida a equivalência (o isomorfismo) entre os dois jogos: o das lâmpadas e o das torres de Hanói mais restritivo. Em [4] é possível jogar os dois jogos e observar o isomorfismo descrito.

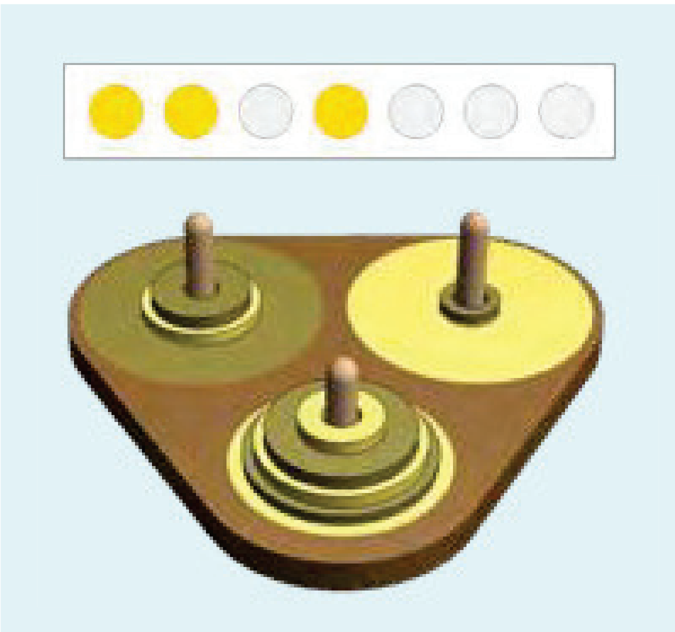


Figura 8

REFERÊNCIAS

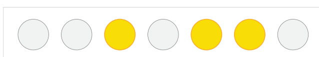
[1] *http://www.atractor.pt/mat/JogosIsomorfos/regras.cdf*

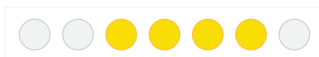
[2] *http://www.wolfram.com/cdf-player*

[3] *http://www.spm.pt/olimpiadas*

[4] *http://www.atractor.pt/mat/JogosIsomorfos*

[1] Um clique numa lâmpada fá-la mudar de estado se e só se ela for a primeira da fila, ou então se a única lâmpada acesa à sua esquerda for a contígua. O estado das lâmpadas à direita da lâmpada clicada é, pois, irrelevante. Nas filas de ambas as figuras seguintes, a 4ª lâmpada muda o seu estado por um clique e qualquer das duas filas muda de uma das figuras indicadas para a outra:





[2] Este problema foi proposto na Final Nacional das XXIX Olimpíadas de Matemática de 2011 (categoria B – 2º dia). Ver [3].