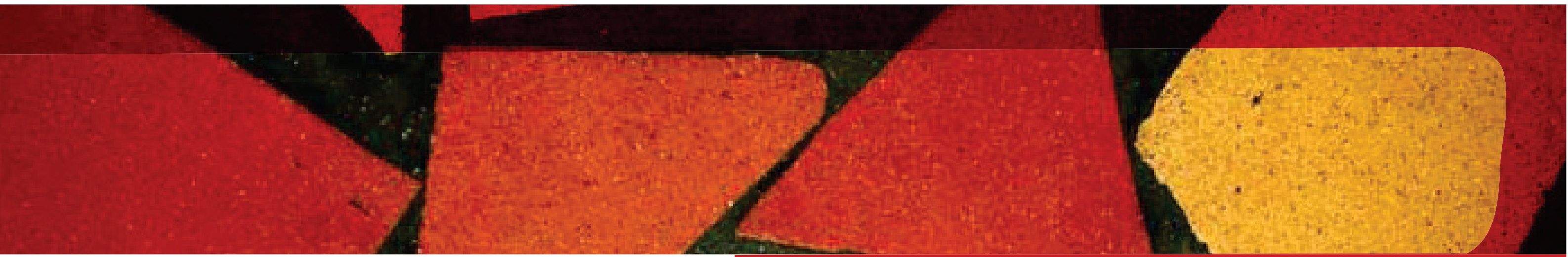


MANUEL SILVA
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

PEDRO J. FREITAS
Universidade de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

O *DONUT* PERFEITO

Ao contrário do que possa parecer, este texto não é sobre gastronomia. A perfeição que aparece mencionada no título tem mais a ver com matemática do que com paladar, e mesmo o *donut* de que se fala tem muito poucas calorias.

Comecemos então por falar da perfeição. Se perguntássemos a várias pessoas qual o número mais perfeito, ou o polígono mais perfeito, provavelmente obteríamos várias respostas distintas, e provavelmente todas bem fundamentadas. Seria possível achar que o triângulo era o polígono mais perfeito, por ser o que tem menos lados, ou por ficar completamente definido sabendo os comprimentos dos lados; seria também possível defender, como no livro *Flatland*, que quanto mais lados um polígono tem, mais nobre (e perfeito) ele é, por se aproximar da circunferência.

Seria também possível dizer que era o pentágono regular o polígono mais perfeito, dadas as proximidades com o número de ouro, que é por sua vez um candidato a ser o número mais perfeito. No entanto, outros candidatos haveria, como por exemplo o π ou o e, por serem números transcendentes que desempenham papéis inesperadamente centrais em toda a matemática — o número de ouro tem uma participação muito mais modesta, e chegaria, quando muito, em terceiro lugar nesta corrida de irracionais.

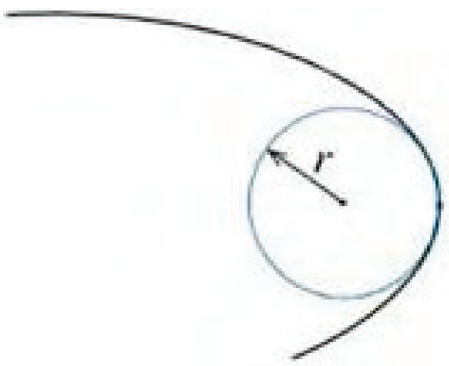
Para fixar ideias, neste texto estamos interessados em figuras geométricas no plano e no espaço, e aqui, a "perfeição" vai ter uma definição precisa. Se procurarmos, por exemplo, a curva plana fechada, de comprimento fixo, que limita a maior área possível, a resposta vai ser, como possivelmente se espera, a circunferência. Esta é uma consequência simples da desigualdade isoperimétrica: para uma curva fechada com comprimento L, que limite uma área A, temos

$$4\pi A \leq L^2,$$

com igualdade apenas se a curva for uma circunferência. É imediato ver que, no caso da circunferência, se substituirmos $A = \pi r^2$ e $L = 2\pi r$, obtemos a igualdade.

Outra forma um pouco mais sofisticada de definir a "perfeição" de uma curva fechada é definir, de alguma forma, a energia dessa curva, e procurar a curva que tem menor energia. Esta minimização de energia é uma maneira natural de olhar para a perfeição, pois há vários problemas de física que se resolvem encontrando a curva que minimiza alguma grandeza, dentro de uma certa classe de curvas.

Definimos a energia de uma curva γ num ponto como a curvatura da circunferência osculante à curva nesse ponto, que, informalmente, significa que é a circunferência que melhor aproxima a curva próximo do ponto. Se a circunferência osculante tiver raio r, essa curvatura κ será dada por $1/r$.



Circunferência osculante

Podemos definir energia de uma curva como

$$L(\gamma)\int_\gamma \kappa^2 ds,$$

em que $L(\gamma) = \int_\gamma 1ds$ é o comprimento da curva γ. Esta definição garante que a energia é uma grandeza adimensional, e, portanto, invariante por mudança de escala, e que será tanto maior quanto maior for a curvatura de γ (para o mesmo comprimento). Werner Fenchel provou em 1929 que $\int_\gamma |\kappa| ds \geq 2\pi$, com γ igualdade se e só se $\kappa \geq 0$, isto é, se a curva for convexa. Ora, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, é simples verificar que a energia de qualquer curva é maior ou igual a $4\pi^2$:

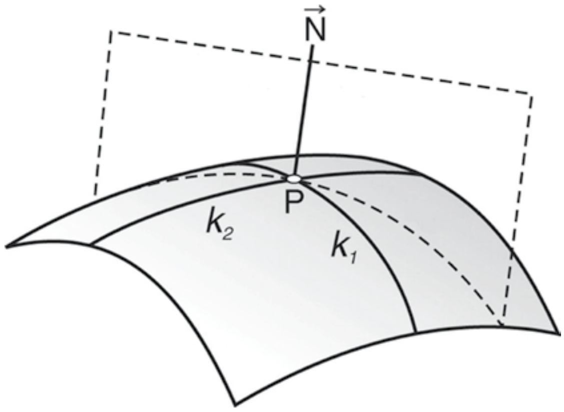
$$4\pi^2 \leq \left(\int_\gamma |\kappa| ds\right)^2 \leq \int_\gamma 1ds \int_\gamma \kappa^2 ds = L(\gamma)\int_\gamma \kappa^2 ds.$$

Se a energia for igual a $4\pi^2$, temos também igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz, o que implica que as funções κ^2 e 1 são múltiplas uma da outra, isto é, κ é constante e a curva é uma circunferência — que é então a curva de menor energia.

Passando agora para o espaço tridimensional, podemos fazer uma pergunta similar: consideremos todas as superfícies difeomorfas à superfície de uma esfera, isto é, que se podem deformar numa superfície esférica, sem criar nem eliminar vincos. De todas estas, qual será a que minimiza um integral de energia do mesmo tipo? A energia aqui será a denominada *energia elástica*, dada por

$$\int_\Sigma H^2 dA,$$

em que a função H é a *curvatura média* da superfície Σ em cada ponto. Esta é dada pela média aritmética das duas curvaturas principais (na figura, k_1 e k_2), que são os valores máximo e mínimo das curvaturas de curvas obtidas por interseção da superfície Σ com planos contendo o vetor $\overrightarrow{N}$ normal à superfície.



Estas duas curvaturas são sempre obtidas por planos perpendiculares um ao outro.

Em 1965, Thomas Willmore demonstrou que todas as superfícies compactas difeomorfas à superfície esférica têm energia elástica maior ou igual a 4π, sendo este valor atingido apenas na superfície da esfera. Assim, é esta a superfície de menor energia.

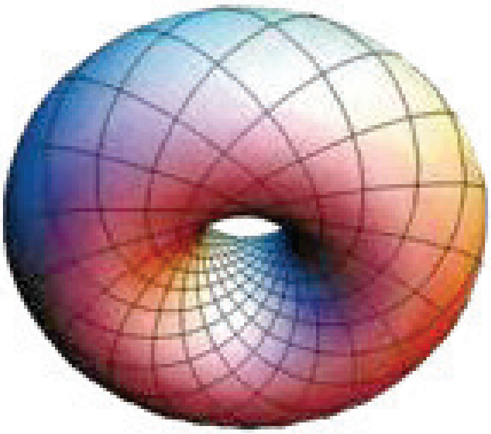
E o que se passaria com outras superfícies? As que se seguem naturalmente, em termos de complexidade, são as difeomorfas a um toro — dentre essas, qual será a que tem energia elástica mínima? Willmore conjeturou que este valor seria $2\pi^2$, e que este seria atingido no toro de Clifford, que representamos na figura, ou em qualquer sua deformação conforme.

O toro de Clifford pode ser obtido rodando a circunferência contida no plano $y0z$, de raio 1 e centro no ponto $(0, \sqrt{2}, 0)$ à volta do eixo dos zz. A sua equação paramétrica, tal como descrita em [FM], é

$$(u, v) \mapsto ((\sqrt{2} + \cos u)\cos v, (\sqrt{2} + \cos u)\sin v, \sin u) \in \mathbb{R}^3.$$

A própria natureza parecia estar de acordo com esta conjetura. Verificou-se, nos anos 90, que certas células, quando formam membranas com forma de toro, assumem naturalmente a forma do toro de Clifford, ou uma das referidas deformações.

A questão foi resolvida em 2012 por Fernando C. Marques, do IMPA, e André Neves, do Imperial College, que apresentou recentemente uma palestra sobre o assunto, [1], na qual, aliás, este texto é largamente baseado. O resultado que demonstraram prova a conjetura de Willmore, 47 anos depois de esta ter sido enunciada: a energia mínima destas superfícies é de facto $2\pi^2$, e é atingida no toro de Clifford, bem como nas superfícies obtidas desta por deformações conformes.



Toro de Clifford

REFERÊNCIAS

[1] Palestra de André Neves, disponível em *http://www.livestream.com/fcglive/video?clipId=pla94fd459f-6a70-4ced-9428-6e8d5ab9b161* (endereço visitado a 10/01/2013).

[F] E. Abbott, *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, 1884.

[FM] Fernando C. Marques, André Neves, "Min-Max Theory and the Willmore Conjecture", aceite para publicação no *Annals of Mathematics.*

[R] A. Ros, "The Isoperimetric and Willmore Problems", *Contemporary Mathematics*, Volume 288, 2001.