ATRACTOR

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site *www.atractor.pt* .
Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

CORTESIA EM JOGO

O presente texto gira em torno da pergunta seguinte: *num conjunto de dados diferentes, qual é o melhor?*

Esta pergunta, que é natural formular, levanta uma questão matematicamente interessante que tem uma resposta algo inesperada. E foram estes dois aspetos que ditaram a escolha, pelo Atractor, de um módulo para a exposição "Matemática Viva"[1], que permitia precisamente pôr em evidência um comportamento aparentemente estranho.

Antes de descrevermos esse módulo, tornemos claro o que entendemos por um dado ser melhor do que outro. Os dados *normais* são cubos e têm, em cada uma das seis faces, um número diferente de pintas, entre um e seis. Nenhum dado é melhor do que o outro, no sentido de que dois jogadores, cada um com um dos dois dados, têm iguais probabilidades de ganhar, podendo ainda empatar. Se em vez de considerarmos dois dados normais, admitirmos que em cada face de cada um há um número de pintas entre 0 e 6, podendo duas ou mais faces de um mesmo dado ter igual número de pintas, então os dois dados podem ser diferentes entre si e as probabilidades de cada um ganhar não serem as mesmas, além de que a probabilidade de empate pode ser 0. O dado A é considerado *melhor* do que o dado B, se a probabilidade de A ganhar a B for maior do que a de B ganhar a A. Por exemplo, se as seis faces de A tiverem, respectivamente, 1, 1, 1, 3, 3, 3 pintas e as de B tiverem todas 4 pintas, o jogo nunca empata e a probabilidade de A ganhar é 0, o que equivale a afirmar que a de B ganhar é 1. Se os dados forem iguais, as probabilidades de A e B ganharem são as mesmas, mas o seu valor depende da probabilidade de A e B empatarem. Por exemplo, se A e B forem iguais e além disso todas as faces tiverem o mesmo número de pintas, a probabilidade de empate é 1 e, portanto, a probabilidade de cada um ganhar é 0. O leitor poderá verificar que esta situação extrema só acontece nas condições descritas, também elas extremas.

Figura 1

[1] A exposição "Matemática Viva", que esteve patente no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa, entre novembro de 2000 e agosto de 2010, foi concebida e criada pelo Atractor.

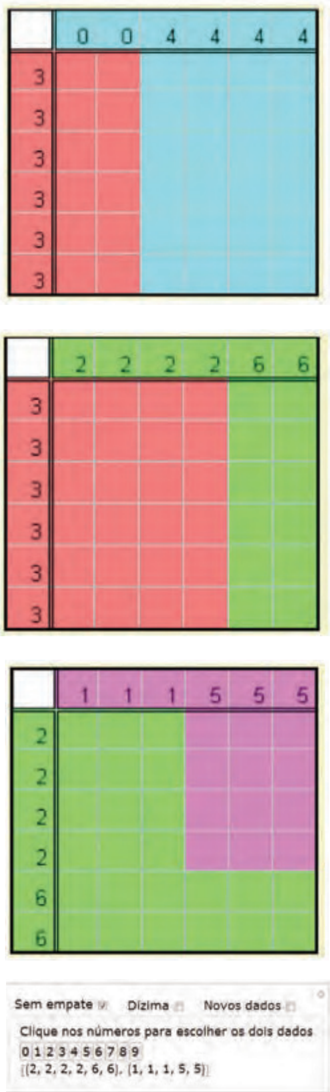

Figura 2

Suponhamos agora que A tem duas faces sem pintas e quatro com 4 pintas, o que convencionamos descrever por $A = (0, 0, 4, 4, 4, 4)$ e, com notação análoga, suponhamos $B = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$. Em cada par de lançamentos (de A seguido de B) o jogo nunca empata, e há 36 pares (igualmente prováveis) de faces possíveis (em cada par de lançamentos), mas os pares de números obtidos são apenas dois: (0, 3), em que ganha B e (4, 3), em que ganha A. Ora, dos 36 casos possíveis, 12 correspondem a (0, 3) e 24 a (4, 3). Portanto, a probabilidade de B ganhar é $12/36 = 1/3$ e a de A ganhar é o dobro: $24/36 = 2/3$. Se B jogar com um terceiro dado $C = (2, 2, 2, 2, 6, 6)$, também nunca há empate, B ganha a C em 24 dos 36 casos e C ganha a B nos outros 12: podemos traduzir a situação, dizendo que B é *duas vezes melhor* do que C. Deixamos ao leitor a verificação de que, tomando como quarto dado $D = (1, 1, 1, 5, 5, 5)$, C é duas vezes melhor do que D. (Para controlar ou evitar as contas, pode usar uma calculadora de probabilidades [1], figura 2).

Chegados a este ponto, e encarando apenas as observações feitas, parece que, relativamente à questão formulada no início do artigo, é natural conjeturar que, no caso dos dados A, B, C, D acima definidos, a resposta é clara: o dado A é o melhor dos quatro, uma vez que é melhor do que B, este é melhor do que C e C é melhor do que D. Em particular, se dois jogadores decidirem jogar e, antes de começarem, tiverem a oportunidade de escolher o dado que preferem (entre A, B, C e D), parece que o primeiro parte em vantagem, bastando-lhe escolher o dado A.

Figura3

O termo "conjecturar" usado acima em vez de "concluir" pode parecer de uma prudência excessiva. Mas, se o leitor fizer a comparação direta entre A e D, poderá verificar que A só ganha nos 12 pares correspondentes a (4,1), perdendo nos restantes 24 (= 6 + 6 + 12) correspondentes a (0,1), (0,5) e (4,5). Quer dizer: o dado D, que *devia* ser muito (? 8 vezes) pior do que A, é na verdade duas vezes melhor do que ele... Voltemos à conjectura: subjacente à sua formulação estava a ideia, que acaba de se verificar ser errada, de que a relação entre dados, traduzida por "melhor do que" seria transitiva.

Figura 4

O quadro ao lado representa bem o ciclo de dados que se considerou: em cada coluna estão indicados os números de pintas das seis faces e em cima a probabilidade de esse dado ganhar ao representado na coluna seguinte (a seguinte à última é a primeira). Na situação atrás referida, se, realmente, o primeiro jogador tivesse escolhido o dado A, bastaria ao segundo escolher D, para ter uma probabilidade de 2 contra 1 de ganhar ao primeiro. Mas se o primeiro jogador tivesse escolhido qualquer outro dado, bastaria ao segundo escolher o *precedente* (na seriação A, B, C, D) para ter uma probabilidade de 2 contra 1 de ganhar ao primeiro. Isto é, o jogador que escolhe o dado em segundo lugar é que parte em grande vantagem, pois pode sempre escolher um dado melhor do que o do outro jogador (a noção de cortesia é invertida neste contexto: ser cortês é aqui "servir-se primeiro" e não "deixar o adversário servir-se"...). Conclusão: a pergunta inicial está mal formulada e induz uma ideia errada; antes de perguntar qual o dado melhor, seria prudente estar certo de que existe **sempre** um dado melhor do que todos os restantes (pelo menos num sentido lato). Ora isso não acontece, como o comprova o exemplo dado. Na exposição "Matemática Viva", havia uma mesa (ver foto da figura 1) e, sobre ela, quatro dados com a composição A, B, C, D indicada acima. Com quatro jogadores à volta da mesa, cada um jogava um número razoável de ve-

Figura5

zes com o seu vizinho da direita e anotava o resultado, depois o da direita jogava com o seguinte (à direita) e assim sucessivamente. Com grande probabilidade[2], cada jogador ganhava ao jogador à sua direita, o que acabava por "sugerir" que não havia nenhum dado melhor do que todos os outros[3].

Um ciclo de quatro dados como (*A, B, C, D*) atrás considerado diz-se *não-transitivo*. E é natural agora levantar a questão de saber se haveria outras escolhas possíveis para os números de pintas nas faces dos seis dados, escolhas essas que fossem igualmente adequadas para pôr em evidência esta inesperada propriedade. Se quisermos escolher quatro dados de forma a que, tal como acontece naqueles dados, nunca haja empate em qualquer das jogadas entre dois deles, teremos de os escolher de modo a que nenhuma face de cada um deles tenha o mesmo número de pintas de qualquer face do outro. Ora, se permitirmos de 0 a 6 pintas, estas sete possibilidades não chegam para que todos os quatro dados tenham dois tipos de faces ($4 \times 2 = 8 > 7$ alternativas), portanto, pelo menos um dado terá necessariamente todas as faces com o mesmo número de pintas. Usando um programa feito no *Mathematica* com esse propósito, selecionámos todos os ciclos não-transitivos, isto é, em que as probabilidades de cada dado ganhar ao seguinte são todas maiores do que 1/2. Encontrámos 37 ciclos não-transitivos (ver [1]), dos quais os 12 primeiros estão representados na figura 5.

Calculando, para cada ciclo, o mínimo das probabilidades referidas, todas elas maiores do que 1/2, obtivemos para esses mínimos apenas três valores: 5/9, 7/12 e 2/3, mas apenas um ciclo, o indicado acima, tem mínimo 2/3, que é o valor (comum) da probabilidade de cada dado ganhar ao seguinte no ciclo. Dos restantes 36 ciclos, três (do 2.º ao 4.º, na figura) têm 7/12 como probabilidade mínima e 33 têm 5/9. Ora, 5/9 é muito próximo de 1/2, isto é, a probabilidade de um dado ganhar ao outro é só ligeiramente maior do que a de perder. E essa pequena diferença torna a escolha desinteressante: com um pequeno número de jogadas, não se consegue pôr em evidência de modo significativo a diferença entre os resultados dos dois dados. Além disso, um ciclo que corresponda a 7/12, embora em grau ligeiramente menor do que no caso 5/9, também tem um inconveniente análogo e não é uma boa escolha. Em conclusão: o ciclo da "Matemática Viva" era a única escolha ótima!

Para uma versão virtual deste módulo, interessa dispor de vários ciclos não-transitivos diferentes, todos *ótimos* (no sentido de a probabilidade mínima ser a maior possível[4]). Isso não é viável para dados com 0 a 6 pintas nas faces, pois já vimos que só há um ciclo ótimo, o acima indicado. Mas recorrendo a dados com faces podendo ter maior número de pintas e mantendo as outras características (em particular, ser 2 o número máximo de faces diferentes em cada dado),

---

[2] Suponhamos que, para cada par de jogadores, há um lançamento dos dois dados, não apenas uma vez, mas sim um número *n* (ímpar) de vezes. Se se considerar ganhador aquele que mais vezes obtiver um número maior do que o do oponente, então a probabilidade de *A* ganhar a *B* neste jogo aumenta relativamente à de *A* ganhar a *B* com apenas um lançamento de *A* e outro de *B* (suposta > 0.5). É esta a razão pela qual se preconizava no módulo da "Matemática Viva" que os visitantes repetissem várias vezes os lançamentos. O leitor pode verificar que essa probabilidade é dada pela seguinte fórmula

$$\sum_{=k}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j}, \text{ em que } n = 2k-1 \text{ e } \binom{n}{j} = \frac{n!}{(j!(n-j)!)}.$$

Os primeiros vinte valores, para n=1,3,...,39 são aproximadamente: 0.667, 0.741, 0.790, 0.827, 0.855, 0.878, 0.896, 0.912, 0.925, 0.935, 0.944, 0.952, 0.958, 0.964, 0.969, 0.973, 0.977, 0.980, 0.982, 0.984.

[3] Refira-se como curiosidade que, se *B* jogasse com *D*, a probabilidade de lhe ganhar seria 1/2, e, se *A* jogasse com *C*, a probabilidade de *A* ganhar seria 4/9.

[4] Trybula e Steinhaus provaram que essa probabilidade mínima não pode exceder o valor encontrado naquele ciclo: 2/3. Ver [2] e [3].

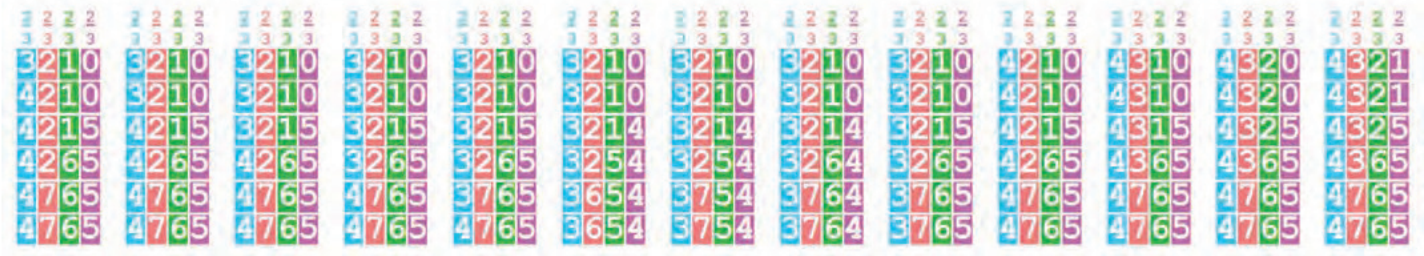

Figura 6

é possível obter mais ciclos *ótimos*. Com o *Mathematica* foi possível localizar 13 ciclos *ótimos* para 0 a 7 pintas e 81 para 0 a 8 pintas (num total, respetivamente, de 527 e 3495 ciclos não-transitivos). Na figura 6, eis os ciclos ótimos com 0 a 7 pintas.[5]

Se, em vez de ciclos de quatro dados, nos limitarmos a ciclos de três, digamos com uma a seis pintas, haverá algo interessante a referir? Vamos desistir da impossibilidade de ocorrerem empates, mas acordamos que, quando num par de lançamentos houver um empate, ele é ignorado e o lançamento é repetido até à vitória de um dos lados.

Analisando a situação com um programa feito no *Mathematica*, foi possível recolher alguma informação: há 462 dados diferentes e com eles podemos construir 40666 ciclos não-transitivos. Mas 68 dados não intervêm nestes ciclos e, dos restantes 394, a frequência com que surgem é muito variável: desde dois dados ({1,1,2,2,2,4} e {3,5,5,5,6,6}) que aparecem, cada um, em apenas um ciclo, respetivamente {{1, 1, 1, 2, 4, 4}, {1, 1, 1, 3, 3, 4}, {1, 1, 2, 2, 2, 4}} e {{3, 3, 5, 6, 6, 6}, {3, 5, 5, 5, 6, 6}, {3, 4, 4, 6, 6, 6}}, até dois outros dados ({1,1,1,5,6,6} e {1,1,2,6,6,6}) que aparecem, cada um, em 1897 ciclos distintos.

A figura 7 contém um gráfico de barras mostrando a frequência com que intervém cada dado nos diferentes ciclos não-transitivos. Em [1] é possível ver a figura numa maior resolução e uma análise mais fina permite observar que as barras desse gráfico aparecem aos pares com a mesma altura. Na base da figura estão representados os dados por colunas, cada uma com os números de pintas das faces do dado. E os dados de cada par, que aparecem, pois, ambos com a mesma frequência, estão relacionados pela forma seguinte: se $(n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_5 \leq n_6)$ são os números de pintas das faces de um dado, os números das pintas das faces do outro dado são $(m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_5 \geq m_6)$, sendo, para cada $i = 1, \ldots, 6$, $n_i + m_i = 7$. No site [1] há mais informação sobre a relação entre os 3-ciclos não-transitivos em que cada dado do par intervém.

Os valores dos mínimos das probabilidades dos ciclos não-transitivos são {18/35, 17/33, 16/31, 15/29, 14/27, 13/25,

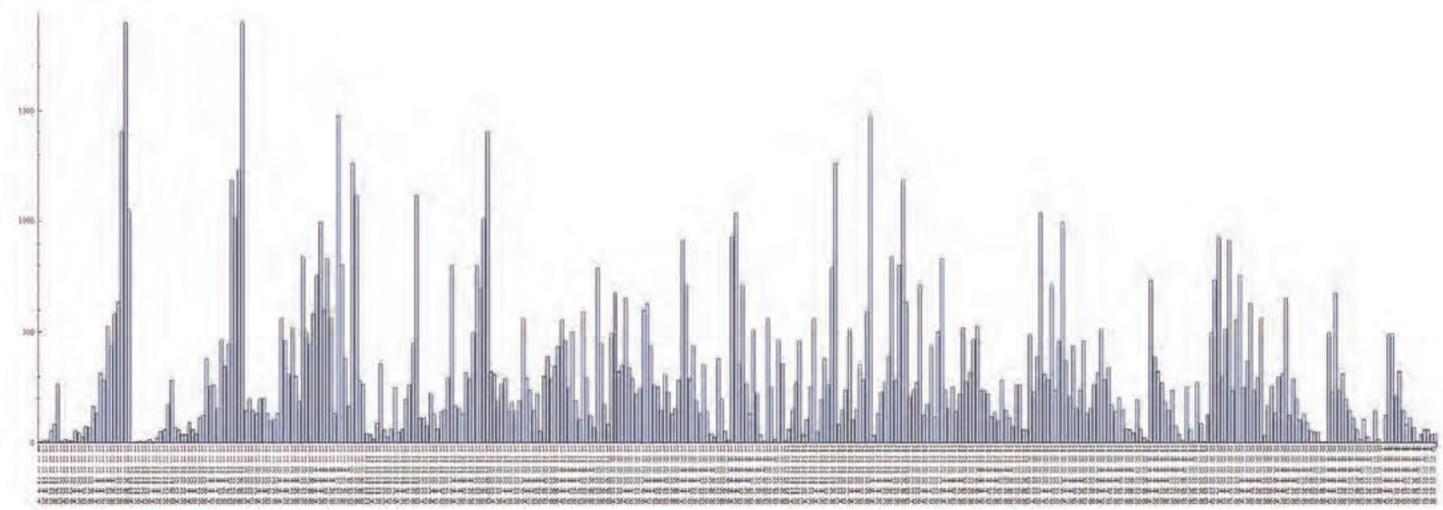

Figura 7

12/23, 11/21, 10/19, 19/36, 9/17, 17/32, 8/15, 15/28, 7/13, 13/24, 19/35, 6/11, 17/31, 16/29, 5/9, 19/34, 9/16, 17/30, 4/7, 15/26, 7/12} e oscilam, pois, entre 18/35 e 7/12, aparecendo com desigual frequência, como mostra o gráfico de barras (Figura 8). Para se ter uma ideia, não só do mínimo das probabilidades para cada ciclo não-transitivo mas também do próprio terno das probabilidades (de cada dado ganhar ao seguinte), o melhor é fazer uma representação gráfica desses ternos. Note-se que, para cada ciclo, associar-lhe um terno de probabilidades pressupõe a escolha (arbitrária) de um elemento inicial do ciclo. As outras escolhas correspondem a rodar a figura anterior por ângulos de 120º e 240º, em torno da reta passando pela origem e com direção determinada pelo vetor (1,1,1). Esses três conjuntos de pontos estão representados a cores diferentes na Figura 9. E o par estereoscópico representa um conjunto análogo mas correspondente aos 3-ciclos de dados com apenas 1 a 4 pintas nas faces (Figura 10).

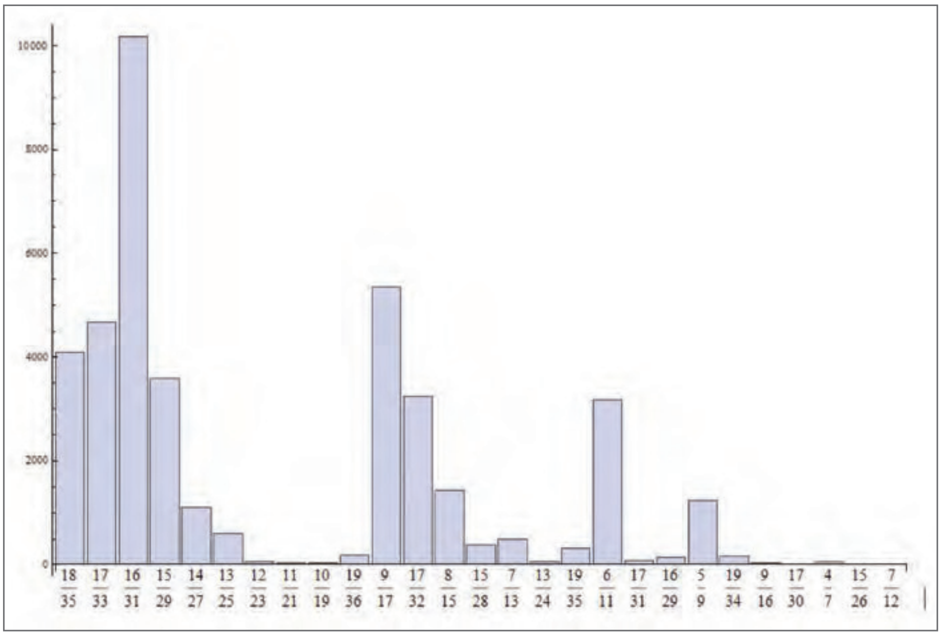

Figura 8

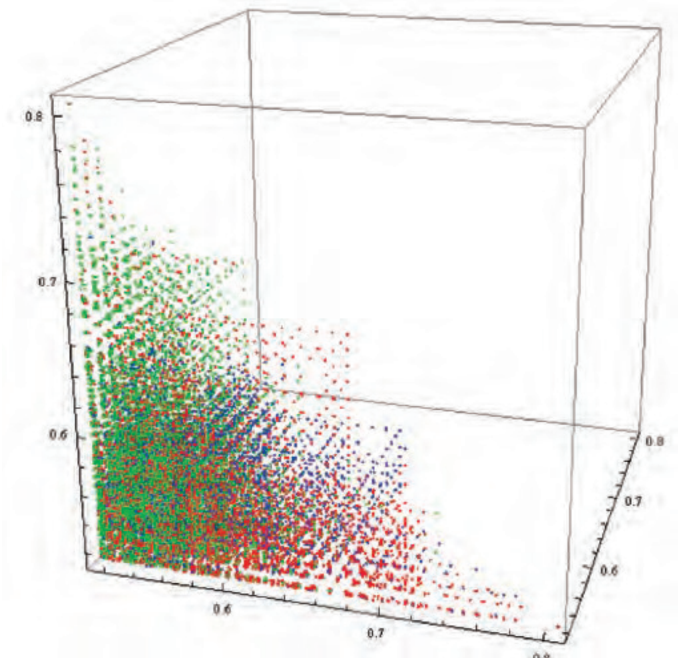

Figura 9

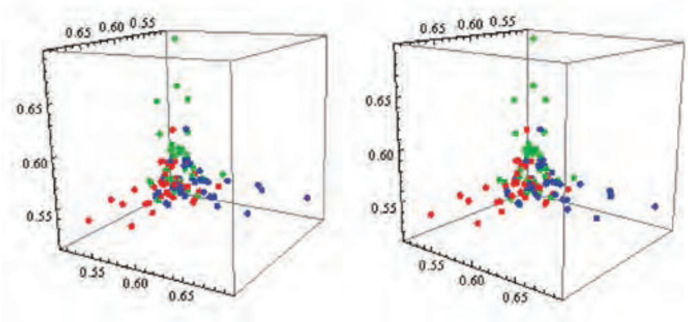

Figura 10

REFERÊNCIAS

[1] *http://www.atractor.pt/mat/JogoDados*

[2] H. Steinhaus, S. Trybula. "On a paradox in applied probabilities", *Bulletin of the Polish Academy of Sciences 7* (1959), 67-69

[3] Usiskin, "Max-min probabilities in the voting paradox", *Annals of Mathematical Statistics* Vol. 35, 2 (1964), 857-862

[5] Ver mais informações no *site* do Atractor [1].