CANTO DÉLFICO

Eduardo Marques de Sá
Universidade de Coimbra
emsa@mat.uc.pt

MIGALHAS DE XADREZ E MATEMÁTICA

A matemática e o jogo do xadrez têm afinidades profundas: pensamento estratégico, avaliação posicional, arte combinatória, problemas tantalizantes, dificuldades inesperadas...

Não são raros os matemáticos que se dedicaram com sucesso ao xadrez. O exemplo mais notável é o de Emanuel Lasker (1868-1941) que conseguiu conjugar 27 anos de campeão mundial de xadrez com um desempenho notável como matemático; os manuais de álgebra comutativa referem os *anéis de Lasker* e um importante teorema com o seu nome, sobre anéis de polinómios, que foi 16 anos mais tarde suplantado por Emmy Nöther, a famosa filha do orientador de tese de Lasker.

No xadrez existe a possibilidade de empate, aliás, o empate é mesmo o resultado da maioria absoluta das partidas jogadas entre grandes mestres. Com base apenas nas regras básicas de movimentação das pedras, o xadrez é um jogo *infinito*, explicando melhor: há apenas um número finito de posições possíveis, mas existem sequências infinitas de jogadas de que, obviamente, nenhum dos jogadores sai vitorioso. Sendo desejável que o jogo se torne finito, desde há muito tempo se vêm aperfeiçoando leis que determinem objetivamente o empate. Um caso curioso ocorreu em 1929. Até essa altura, em alguns países do centro europeu vigorou a seguinte regra:

(*) *Uma partida está empatada se uma determinada sequência de jogadas ocorre pela terceira vez consecutiva.*

Aparentemente, muitos xadrezistas desse tempo acreditavam que isto assegurava a finitude do jogo. Mas Max Euwe (1901-1981), também ele matemático e campeão mundial (em 1935-37), provou que não era assim, construindo partidas infinitas que não violam essa regra. Vejamos uma receita para a construção duma partida desse tipo. Olhamos apenas para os dois reis, branco e negro, sozinhos no tabuleiro, como nas figuras mais abaixo. O rei negro decalca as suas jogadas da seguinte sequência de zeros-e-uns:

01101001100101101001011001101001100101100110100101...

dita da *paridade binária*, cujo n-ésimo termo, para $n \geqslant 0$, é por definição a soma binária dos *bits* da representação binária de n. Eis como se move o rei negro: na sua n-ésima vez de jogar, se o termo n da sequência é 0, ele desloca-se uma casa para a esquerda daquela em que se encontra, se é 1 ele desloca-se uma casa para a direita. A peça negra parece dançar num ritmo indecifrável: toca apenas em três casas e de modo aperiódico... *Porquê?* O rei branco pode dançar qualquer dança, como o *passo doble*, ou deambular preguiçosamente pelo tabuleiro, à toa, mas sem interferir no movimento preciso do outro. O facto interessante é que este *pas de deux* real não viola a regra (*). De facto, a sequência da paridade binária não possui secção nenhuma que ocorra três vezes consecutivas!

Em 1929, ano de publicação do artigo de Euwe, a Federação Internacional de Xadrez propôs a primeira versão oficial das regras do jogo, onde o empate vigora sempre que certa posição do jogo ocorre pela terceira vez. A partir daí, o jogo passou a ser burocraticamente finito! Acrescente-se que existem outras regras tendentes a abreviar a ocorrência dum empate, como a impossibilidade material duma vitória, providências cautelares contra longas sequências "inócuas", acordo entre os contendores, etc..

Em abono da verdade, diga-se que Euwe reinventou a sucessão acima referida. Os nomes a ela associados são: Eugéne Prouhet, que a encontrou, em 1851, na teoria dos números; Axel Thue, em 1906, numa questão combinatória; Marston Morse, em 1921, em geometria diferencial; e Max Euwe, a propósito das regras do xadrez, como vimos. Trata-se dum daqueles objetos matemáticos multifacetados, com muitas definições alternativas retiradas de áreas bem distintas que vale a pena revisitar. Por exemplo, tem uma estrutura fractal, por ser igual a uma subsucessão sua, a dos termos de ordem par, sendo por isso igual a uma infinidade de subsucessões suas... *Porquê?* Por outro lado, ela é uma concatenação de cópias das secções A=0110 e B=1001 e, se nela substituirmos cada 0 por uma secção A e cada 1 por B, reobtemo-la de volta... *Porquê?*

Os problemas seguintes são vagas reminiscências do xadrez. No tabuleiro vão estar apenas os dois reis, o que no xadrez real não interessa. Como um rei não pode encostar-se a outro rei,[1] o resultado xadrezístico é um empate, a não ser que se mudem as regras, o que vai ser o caso.

Introduzamos a seguinte restrição aos movimentos permitidos ao rei no xadrez tradicional:

Lei da Reincidência. *Em cada partida perde o rei que ocupe uma casa já por si ocupada em alguma jogada anterior.*

Nestas condições, cada partida termina ao cabo de não mais de 64 movimentos de cada rei, com a vitória dum deles. Em jogos deste tipo – finitos, sem empates, de informação completa e sem intervenção de fatores aleatórios – sabe-se, desde a posição inicial, que um dos jogadores tem uma estratégia para vencer. Os problemas matemáticos são determinar qual deles detém essa estratégia e como deve jogar para vencer.

No diagrama da figura ao lado, a linha quebrada separa duas partidas distintas de rei contra rei sob a lei de reincidência. A chave para resolver alguns destes problemas é bem conhecida no xadrez: diz-se que os reis estão em *oposição* se ocupam casas da mesma cor e na mesma fila (linha ou coluna); o rei que tem de jogar está, em geral, em maus lençóis; diz-se então que o outro *detém a oposição*.

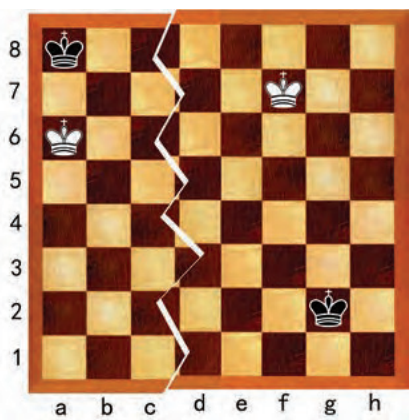
Na partida do lado esquerdo, cabe às negras jogar, pelo que o rei branco detém a oposição. O negro só pode jogar para b8, o que possibilita ao branco deter de novo a oposição, jogando b6; depois o negro é forçado a ir a c8, o branco joga c6 e assim sucessivamente até ao afogamento do rei negro. Coloca-se agora a questão, que fica a seu cargo: *se for o rei branco a jogar, quem tem a estratégia vencedora?*

Na partida da parte direita, os reis não estão em oposição, mas o primeiro a jogar pode detê-la logo na abertura. Abrindo as negras, o rei passa a deter a oposição jogando para f3 e ganhará cumprindo sem falhas duas cláusulas estratégicas: deter sistematicamente a oposição e nunca jogar para sul. O rei branco acaba por ter de recuar até á linha 8 e por lá dar os seus últimos passos. Para o negro, manter a oposição recuando para sul – *e.g.*, indo para f1 na jogada de abertura – pode ser-lhe fatal... *Porquê?*

Propõe-se de seguida uma nova regra de desempate das batalhas reais:

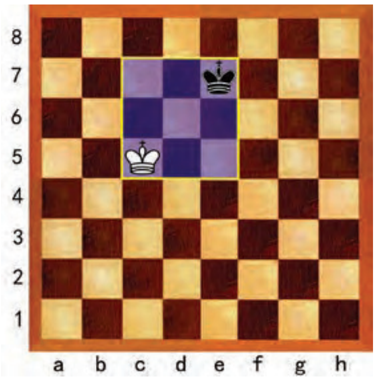
Lei da Terra Queimada. *Em cada partida nenhum rei pode ocupar uma casa que ele ou o seu adversário tenham ocupado anteriormente.*

Na partida do lado esquerdo do diagrama abaixo, a lei da reincidência dá a vitória a quem detém a oposição mas, com a lei da terra queimada vence o rei branco, independentemente de quem joga primeiro; para ganhar, ele pode limitar-se a queimar toda a linha 6 e recuar calmamente para sul, deixando o rei negro a rabiar no reduzido espaço a norte da linha de fogo. Fica a seu cargo, leitor, a discussão da posição acima, à direita.



Deixo para o fim o trabalho mais difícil: tratar posições iniciais em que a oposição não é imediatamente acessível. O diagrama à direita mostra o caso simples de oposição dita "diagonal". A análise é trivial quando a ação decorre no tabuleiro 3×3 marcado na figura: as brancas, aqui com a obrigação de jogar primeiro, perdem (com qualquer das leis de desempate propostas) se o rei negro se limitar a percorrer os bordos do tabuleiro em movimento "giratório"... Por jogarem primeiro, as brancas também se afogam primeiro. Será que esta desvantagem também se faz sentir no tabuleiro 8×8? Do acima dito apenas se extrai a conclusão de que as jogadas de abertura b6 ou d4 serão fatais para as brancas... *Porquê?*

O caso canónico de quando os reis ocupam cantos opostos do tabuleiro fica também em aberto para qualquer das regras de desempate. Num tabuleiro 4×4, por exaustão e força muito bruta, concluí que a lei da terra queimada faz perder quem começa se o outro agir como deve. Mas a lei da reincidência, que dá mais liberdade aos dois reis, ficou de fora. Haja um leitor que ajude!



NOTA BIBLIOGRÁFICA

O leitor pode ver mais sobre a sucessão de Prouhet-Thue-Morse-Euwe na fabulosa "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences", *http://oeis.org/A010060* (visto em 25 de abril de 2013).

[1] Para quem não conhece: o rei é obrigado, em cada jogada, a mover-se para uma das casas adjacentes àquela em que se encontra, mas é-lhe interdito colocar-se numa casa adjacente à que o rei adversário ocupa.