Crie o seu arquivo de exercícios resolvidos parametrizados (Projeto MEGUA)

Pedro Cruz [a], Paula Oliveira[b], Dina Seabra[c]
Universidade de Aveiro
[a] pedrocruz@ua.pt, [b] paula.oliveira@ua.pt, [c] dfcs@ua.pt

INTRODUÇÃO

Muito material, da área da matemática, baseado em ambientes *web* está a ser usado para treino dos alunos, competições ou avaliação, como são exemplos os materiais desenvolvidos nos projetos PMATE [PmatE (2004, 2006, 2010)], AGILMAT [Tomás, A. P et. al. (2008), Costa, R. P. (2003)], e WIMS [Xiao, G. (2004)]. Nestes casos, quando o utilizador gera exercícios, não tem acesso à resolução pormenorizada, tendo nalguns casos acesso à sua solução.

O facto de um aluno poder resolver diferentes exercícios sobre um mesmo tema concreto e, caso deseje, ter acesso à sua resolução, contribui para o seu autoestudo e para a sua autoavaliação.

Já existem vários livros de diferentes áreas de matemática com exercícios resolvidos, mas a construção de bases de dados de exercícios parametrizados vai permitir ao estudante, em diferentes etapas do seu estudo, gerar exercícios de novos tipos, ou do mesmo mas ligeiramente diferentes, e sempre com a respetiva resolução.

Neste artigo apresenta-se o projeto MEGUA, cujo objetivo é a elaboração de bases de dados de exercícios parametrizados e sua resolução, organizadas por classes, usando o *software* Sage Mathematics. Pretende-se que o conjunto de exercícios abranja grande parte dos conteúdos de matemática lecionados nos primeiros anos do ensino superior. O MEGUA pode ser encontrado em *http://code.google.com/p/megua*.

Além disso, a consulta de arquivos de exercícios permite ao docente a rápida elaboração de material didático para apoio às aulas e à avaliação, pois permite gerar diferentes questões sobre o mesmo tópico. Assim, o docente não tem de construir, repetidamente, questões do mesmo tipo.

O QUE É O MEGUA?

MEGUA [MEGUA (2010)] é um sistema que permite a criação de bases de dados de exercícios parametrizados, e respetivas resoluções, em que estes são criados por professores, usando a experiência adquirida ao longo dos anos de lecionação. A geração de novos exercícios ocorre por substituição automática, eventualmente aleatória, de parâmetros por valores numéricos ou funções, extraídos de conjuntos pré-definidos. Este projeto está a ser construído sobre a plataforma Sage Mathematics [Sage Math (2011)].

Anualmente são elaborados exercícios abordando certos tópicos que são resolvidos vezes sem conta por professores e alunos. As dúvidas mantêm-se ao longo dos anos e a questão mais comum é "Como é que se faz?".

Para evitar a repetição sucessiva dos mesmos processos e disponibilizar aos alunos um conjunto de exercícios resolvidos que permita esclarecer as dúvidas comuns foi criado o MEGUA.

O objetivo é o de disponibilizar em rede, quer para professores quer para alunos, um vasto conjunto de exercícios que permita aos alunos aferir os seus conhecimentos e aos professores dê liberdade para investir noutro tipo de problemas e numa preparação de aulas mais eficiente, nomeadamente na criação de mais exercícios ou problemas, textos de apoio e outros meios que implementem o sucesso da aprendizagem.

Cada elemento da base de dados do MEGUA é considerado um "objeto de aprendizagem", que pode ser reutilizado em diversos contextos, como meras folhas de exercícios, jogos, testes, fichas de autodiagnóstico, etc.

Frequentemente, as dificuldades na resolução de um exercício prendem-se não com os conceitos diretamente envolvidos mas com pré-requisitos, como, por exemplo, a manipulação de expressões algébricas.

O detalhe da resolução estará de acordo com o perfil do aluno utilizador, tendo sempre em conta aspetos didáticos do tópico em estudo, contendo justificações dos vários passos dados e referência a alguns dos resultados utilizados para tirar as conclusões adequadas, e aspetos pedagógicos. Por exemplo, um aluno, para aprender a integrar, pode reutilizar exercícios resolvidos do arquivo, relativos à derivação, pois estes funcionam como pré-requisito para a integração.

Atualmente, em Portugal, entram no ensino superior alunos com diferentes percursos académicos, o que leva a que a mesma unidade curricular seja frequentada por alunos com conhecimentos de base bem distintos. Nivelar conhecimentos e ajudar a ultrapassar obstáculos a nível de base de matemática deve ser uma preocupação para os docentes envolvidos em unidades curriculares com este perfil multifacetado.

O facto de acompanhar uma resolução com todos os detalhes explicados ajuda a construir o conhecimento de *baixo para cima*, podendo permitir que uma elevada percentagem de alunos atinja o patamar de aprovação a unidades curriculares para as quais a sua formação anterior era diminuta.

A implementação de um objeto MEGUA passa pela necessidade de três etapas:

- Criação "de autor"
- Programação elementar
- Revisão

Estas etapas devem ser realizadas por pessoas com experiência no ensino, de modo a que a escolha de exercícios e a sua resolução elucidem as dúvidas habituais, permitindo ao estudante prosseguir para exercícios/problemas que exijam um maior grau de conhecimentos.

A experiência permite detetar os problemas comuns dos alunos e, consequentemente, criar conjuntos de exercícios que possam dissipar essas dificuldades.

DESCRIÇÃO E OBJETIVOS DE UM OBJETO DE APRENDIZAGEM MEGUA

Cada exercício pode ser visto como um conceito, geralmente formado por conceitos de base. Por exemplo, um exercício sobre o conceito abrangente de funções trigonométricas pode referir-se apenas a uma das funções trigonométricas, nomeadamente o cosseno. Mas sobre o cosseno poderemos apenas estar a estudar algumas propriedades, como periodicidade, zeros, domínio, contradomínio, restrições para a existência de inversa, derivada, etc.

O projeto MEGUA pretende que se criem vastas bases de dados de exercícios parametrizados e respetivas resoluções, com fins pedagógicos. A organização de uma base de dados desta natureza pressupõe que os exercícios estejam agrupados em classes, cuja utilização e a pesquisa sejam relativamente simples, quer para professores quer para alunos. Para cumprir esta exigência, cada exercício MEGUA é caracterizado por duas etiquetas fundamentais: um número de identificação único e um código que identifica o autor.

Além disso, cada objeto de aprendizagem é descrito por:

- Um sumário (incluindo a catalogação e palavras-chave)
- O texto do enunciado
- O texto da resposta,

tudo criado originalmente num ficheiro de texto LaTeX ou no *notebook* do "Sage Mathematics".

A catalogação dos exercícios deve seguir a classificação MCS 2010 (Mathematics Subject Classification). Por exemplo, um exercício sobre derivadas de funções reais de variável real será catalogado em

26A24 Differentiation (functions of one variable)
general theory, generalized derivatives, mean-value theorems

Para além disso, o autor do exercício caracteriza-o usando algumas palavras-chave e uma breve descrição. Caso se pretenda alterar um exercício, apenas o seu autor poderá fazê-lo, daí que a cada exercício esteja associado o seu autor. No Anexo A, apresenta-se um exemplo em que são visíveis os parâmetros ('on**x1**' e 'on**a**'), e as diferentes secções 'PROBLEM' e 'ANSWER'.

UM ESTUDO DE CASO

A unidade curricular de matemática em muitas licenciaturas, particularmente nas que não estão tão direcionadas para as áreas das ciências, é usualmente um problema e um dos assuntos mais delicados é a trigonometria.

No presente ano letivo, foram fornecidos aos alunos exercícios-tipo e suas resoluções sobre as inversas das funções trigonométricas, nomeadamente arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente, como mostra o exemplo apresentado no Anexo B.

Na unidade curricular em causa, os alunos são frequentemente submetidos a uma questão na aula, a qual faz parte do processo de avaliação. Cada aluno teve de resolver um exercício gerado por parâmetros aleatórios análogo aos que foram feitos na aula. O gráfico ao lado ilustra os resultados obtidos numa questão sobre funções trigonométricas inversas, em que N é a nota do aluno, entre 0 e 20 valores. Atendendo ao tópico em avaliação, os resultados foram substancialmente melhores face a anos anteriores, nos quais raramente os alunos obtinham uma classificação positiva neste tópico.

Dos 45% de negativas (13 num total de 29 alunos) é de observar que 31% foram classificações até 5 valores. No nosso entender, estas notas estão, na sua maior parte, associadas a uma desmotivação pela unidade curricular, enquanto as negativas entre 5 e 9, tendo em conta a natureza do tópico em avaliação e o público em estudo, que não tem conhecimentos prévios de trigonometria, demonstram que algumas das aprendizagens verificáveis foram adquiridas.

CONCLUSÃO

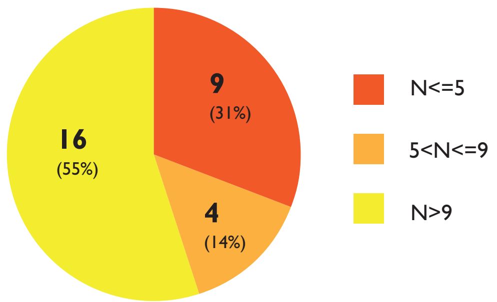
Aprender vendo fazer é uma técnica secular de ensino que tem mostrado ao longo do tempo a sua eficácia. Hoje em dia, com a tecnologia disponível, o aluno pode, ao alcance de um clique, ter uma série de exercícios diferentes e respetivas resoluções, sem necessitar de recorrer sistematicamente ao professor, usando as horas de contacto para questões mais específicas que o impeçam de progredir. O facto de estes exercícios estarem disponíveis permite ao aluno refletir sobre eles e esclarecer efetivamente as dúvidas que ainda persistirem.

No exemplo apresentado, aconteceu por diversas vezes os alunos questionarem na aula apenas algumas passagens da resolução que não entendiam e não a resolução do exercício completo. Esta informação pode ser usada para melhorar a resolução, tentando tornar claras as dúvidas que subsistiram.

Outras situações houve em que o aluno acompanhou a resolução do professor no quadro munido da que lhe tinha sido fornecida, anotando algumas observações que lhe pareceram pertinentes.

O MEGUA, só por si, não constitui uma metodologia de ensino/aprendizagem. É um complemento útil ao autoestudo do aluno e uma ferramenta que permite ao professor investir muito do seu tempo na criação de novos exercícios ou outras iniciativas que promovam uma aprendizagem efetiva dos seus alunos.

RESULTADOS



REFERÊNCIAS

Costa, R. P. (2003) "Geração Automática de Exercícios de Matemática". Tese de Mestrado em Ensino da Matemática. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Tomás, A. P., Leal, J. P., Domingues, M. A. (2008) "A Web Application for Mathematics Education". *Springer-Verlag*, LNCS 4823

Xiao, G. (2004). Public-Questions Tests *http://wims.unice.fr/paper/pqt.pdf* (acedido em março de 2011). Exercícios online: *http://wims.unice.fr*

PmatE (2004) "Modelo Gerador de Questões", IADIS Conferência Ibero-Americana WWW-Internet

PmatE (2006) "An Overview of PmatE: developing software for all degrees of teaching", *Proceedings of the International Conference in Mathematics Sciences and Sciences Education*, June 11-14, University of Aveiro.

PmatE (2010) "An old project in education, teaching and learning using new technologies" (aceite para publicação em Proceedings ICERI 2010 International Conference of Education, Research and Innovation), Pages 7249-7253, ISBN: 978-84-614-2439-9.

MEGUA (2010) MEGUA – Mathematics Exercise Generator. Code and documentation can be found at *http://code.google.com/p/megua*.

Sage Math (2011) William A. Stein et al. *Sage Mathematics Software* (Version 4.6.1), The Sage Development Team, 2011, *http://www.sagemath.org*.

```
#Funções trigonométricas (33B10) Exponen-
tial and trigonometric functions
#Também pode ser 26A09 Elementary functions
# Dada uma função com a*arcsin(b*x), com a
e b positivos determinar a sua inversa, do-
mínio, zeros e contradomínio
#PROBLEM inicia o enunciado
%PROBLEM
Considere a função\[f(x)=ina arcsin{(inb\,x)}\]
 Determine
 \begin{enumerate}
 \item Domínio;
 \item Contradomínio;
 \item Zeros;
 \item $\displaystyle f\left(onb11\right)$;
 \item $\displaystyle  f\left(onb21\right)$;
 \item A solução de
 \begin{enumerate}
 \item $\displaystyle f(x)=ona22$;
 \item $\displaystyle f(x)=ona11$.
 \end{enumerate}
 \item A inversa da função $f$, designando-
 -a por $f^{-1}$.
 \end{enumerate}
Considere     a     função\[f(x)=ina     \,\
arcsin{(inb\,x)}\]
 Determine
 \begin{enumerate}
 \item Domínio;
 \item Contradomínio;
 \item Zeros;
 \item $\displaystyle f\left(onb11\right)$;
 \item $\displaystyle  f\left(onb21\right)$;
 \item A solução de
 \begin{enumerate}
 \item $\displaystyle f(x)=ona22$;
 \item $\displaystyle f(x)=ona11$.
 \end{enumerate}
 \item A inversa da função $f$, designando-
 -a por $f^{-1}$.
 \end{enumerate}
```

ANEXO A-EXEMPLOS DE EXERCÍCIOS PARAMETRIZADOS (versão "MEGUA-01")

O texto ao lado define o enunciado em LaTeX de um exercício parametrizado, no qual consta o texto do exercício, palavras-chave e os parâmetros {ina, inb, onb11,onb21, ona22,ona11} que vão ser substituídos por números, como mostra o exemplo que se apresenta a seguir.

`E33B10_invtrigonometricfunction_001`

Sumário

Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions Também pode ser 26A09 Elementary functions Dada uma função com a*arcsin(b*x), com a e b positivos determinar a sua inversa, domínio, zeros e contradomínio .

Palavras chave:Funções trigonométricas; arcoseno

Problema ekey=1372425087

Considere a função

$$f(x) = 4\,\arcsin{(2\,x)}$$

Determine

1. Domínio;
2. Contradomínio;
3. Zeros;
4. $f\left(\frac{1}{2}\right)$
5. $f\left(-\frac{1}{2}\right)$
6. A solução de
   (a) $f(x) = \pi$;
   (b) $f(x) = 2\,\pi$.
7. A inversa da função f, designando-a por f^{-1}.

Resolução

1. O domínio da função arcsin é $[-1, 1]$, portanto, $2x$ deve pertencer a este intervalo, isto é,

$$-1 \leq 2x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

e, portanto, o domínio é

$$D_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

2. O contradomínio da função arcsin é $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Assim,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(2x) \leq \frac{\pi}{2}$$

e, portanto,

$$-\frac{4\pi}{2} \leq 4\arcsin(2x) \leq \frac{4\pi}{2}$$

e o contradomínio de f é

$$CD_f = [-2\,\pi, 2\,\pi]\,.$$

3. A equação $f(x) = 0$ é equivalente a $4\arcsin(2x) = 0$. Como $4 \neq 0$, a equação é equivalente a $\arcsin(2x) = 0$. O único zero da função arcsin é o próprio zero, então

$$\arcsin(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Portanto, $f(x) = 0$ tem como solução $x = 0$.

4. Para resolver este exercício basta substituir x pelo valor dado, $x = \frac{1}{2}$: $f(x)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\arcsin\left(\frac{1}{2}2\right) = 4\arcsin(1) = 2\,\pi.$$

5. Fazendo em $f(x)$, $x = -\frac{1}{2}$, obtém-se +

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\arcsin\left(-\frac{1}{2}2\right) = 4\arcsin(-1) = -2\,\pi.$$

6.

(a) A equação $f(x) = \pi$ é equivalente a

$$4\arcsin(2x) = \pi \Leftrightarrow \arcsin(2x) = \frac{\pi}{4}.$$

Por definição de inversa,

$$\arcsin(2x) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$$

Assim, como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, vem

$$2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

(b) A equação $f(x) = 2\pi$ é equivalente a

$$4\arcsin(2x) = 2\,\pi \Leftrightarrow \arcsin(2x) = \frac{\pi}{2}$$

Por definição de inversa,

$$\arcsin(2x) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$$

Assim, como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, vem

$$2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

7. O domínio da inversa é o contradomínio da função e o contradomínio da inversa é o domínio da função. Assim,

$$D_{f^{-1}} = [-2\,\pi, 2\,\pi] \quad \text{e} \quad CD_{f^{-1}} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Para determinar a expressão analítica da inversa resolve-se a equação $y = f(x)$ em ordem a x, isto é,

$$y = 4\arcsin(2x) \Leftrightarrow \arcsin(2x) = \frac{1}{4}y \Leftrightarrow 2x = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}y\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}y\right).$$

Assim,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}x\right).$$

ANEXO B – EXEMPLO DE COMANDOS DE UMA SESSÃO

Exemplo a dois passos:

1. sage: from MEGUA.all import *
2. sage: exercicio234.new_exercisefromtext(texto_fonte,key=27)

No passo 1. chamam-se as funções e no passo 2. cria-se um novo exercício do tipo 234, com chave aleatória 27. Esta última permite recriar sempre a mesma concretização dos parâmetros, desde que a *key* se mantenha 27.

SOBRE OS AUTORES

Maria Paula Oliveira é Professora Auxiliar do Departamento de Matemática e coordenadora de conteúdos do Projecto Matemática Ensino da Universidade de Aveiro. Foi várias vezes coordenadora de unidades curriculares com um elevado número de alunos, como Cálculo I e II.

Dina Seabra é Professora Adjunta da Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Águeda. Tem experiência no ensino da Matemática em unidades curriculares com alunos com diferentes percursos académicos.

Pedro Cruz é Professor Auxiliar do Departamento de Matemática. Coordenou a unidades curricular "Métodos Numéricos e Estatísticos" com um elevado número de alunos.