PERGUNTAS SIMPLES, RESPOSTAS SURPREENDENTES

Manuel Silva
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

Pedro J. Freitas
Universidade de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

NOVIDADES SOBRE OS **PRIMOS**

O dia 13 maio de 2013 foi um dia muito especial para os primos. Enquanto o matemático peruano Harald Helfgott anunciava a conclusão da prova da versão ternária da conjetura de Goldbach, nesse mesmo dia o matemático chinês Yitang Zhang apresentava numa palestra o resultado mais importante sobre os números primos dos últimos 100 anos.

A matemática tem a fama, completamente falsa, de produzir verdades infalíveis. A sua infalibilidade não é mais do que identidade. Dois vezes dois não é quatro, mas apenas dois vezes dois, e a isso chamamos quatro para abreviar. Mas o quatro não traz nada de novo. E assim se constroem sucessivamente conclusões, acontece apenas que nas fórmulas mais elaboradas a identidade se esconde da nossa vista.

Johann Wolfgang von Goethe

1. O QUE É QUE SABEMOS SOBRE OS NÚMEROS PRIMOS?

O conjunto dos números primos

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, \cdots\}$$

ocupa uma posição central na Teoria dos Números. Embora as suas propriedades sejam estudadas há cerca de 2500 anos, muitas questões permancem em aberto e outras estão ainda certamente por descobrir. Não é naturalmente fácil obter resultados novos sobre o conjunto dos números primos. Sabemos, por exemplo, que se trata de um conjunto infinito (a demonstração aparece nos *Elementos* de Euclides). Por outro lado, sabemos que existem intervalos arbitrariamente grandes de inteiros sem números primos. Também é conhecida a densidade dos números primos: o número de primos no intervalo $[1, n]$ é assintoticamente $\frac{n}{\ln n}$. Este resultado diz-nos em particular que a probabilidade de encontrar um número primo no intervalo $[1, n]$ é $\frac{1}{\ln n}$, logo, tende para zero quando n tende para infinito. O leitor pode testar a sua intuição aritmética respondendo à seguinte questão: escolhendo ao acaso um número inteiro no intervalo $[1, 10^9]$ será mais provável esse número ser: i) número primo, ii) quadrado perfeito, ou iii) múltiplo de 17?

Terence Tao e Ben Green demonstraram em 2008 que existem progressões aritméticas finitas de comprimento arbitrariamente grande cujos elementos são todos números primos. Por exemplo,

$$199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089$$

é uma progressão aritmética com dez números primos.

Podem passar décadas sem que surjam resultados novos sobre o conjunto do números primos. O dia 13 maio de 2013 foi um dia muito especial para os primos. Enquanto o matemático peruano Harald Helfgott anunciava a conclusão da prova da versão ternária da conjetura de Goldbach, nesse mesmo dia o matemático chinês Yitang Zhang apresentava numa palestra o resultado mais importante sobre os números primos dos últimos 100 anos.

2. A CONJETURA TERNÁRIA DE GOLDBACH

Teorema 1 (Harald Hefgott). *Todo o número ímpar maior do que 5 pode ser escrito como soma de três primos.*

A denominada *conjetura ternária de Goldbach* agora demonstrada por Harald Helfgott afirma que todo o número ímpar maior do que 5 pode ser escrito como soma de três números primos. Por exemplo, $15 = 3 + 5 + 7$ ou $27 = 3 + 11 + 13$. Podemos facilmente verificar que, na maioria dos casos, dado um número ímpar n, é possível encontrar mais de uma maneira de escrever n como soma de três primos. Heuristicamente, e porque a densidade do conjunto dos números primos é quase linear, devem existir muitas representações desta forma. A questão está em saber se *todo* o número ímpar tem, pelo menos, uma representação deste tipo. Existe uma outra *conjetura de Goldbach* para os números pares, a qual, como a anterior, teve origem na correspondência entre Goldbach e Euler em 1742. Esta conjetura afirma que todo o número par maior do que 2 pode ser escrito como soma de dois números primos. A demonstração da conjetura par de Goldbach implicaria naturalmente a versão ternária agora demonstrada por Harald Helfgott: bastaria juntar o primo 3 às representações dos números pares como soma de dois números primos.

Diversos problemas clássicos em Teoria de Números envolvem questões de tipo aditivo como esta: dado um conjunto $A \subset \mathbb{N}$, queremos escrever todos os naturais n como soma de um certo número de elementos do conjunto A. Lagrange demonstrou, por exemplo, que todos os números naturais podiam ser escritos como soma de quatro (ou menos) quadrados perfeitos. Por exemplo, $39 = 25 + 9 + 4 + 1$. A própria representação decimal que usamos para os inteiros corresponde a uma soma com coeficientes entre 0 e 9 de potências de 10.

Harald Helfgott trabalhava já há algum tempo no problema de Goldbach. O argumento agora apresentado utiliza, como é habitual neste tipo de problemas aditivos, o método do círculo de Hardy-Littlewood-Vinogradov. A ideia é construir uma função geradora a partir do número de representações dos inteiros como soma de três primos, e reduzir o problema ao cálculo de um determinado integral dessa função ao longo de uma circunferência centrada na origem. Terence Tao tinha demonstrado em 2012 que todo o número ímpar podia ser escrito como soma de, no máximo, 5 primos. Vinogradov [4] deu o primeiro e decisivo passo ao mostrar que todo o número inteiro $n > C$ era soma de três números primos. O problema estava desde 1937 na constante C, a partir da qual o argumento se aplicava. No argumento inicial nem sequer aparece uma constante explícita, e através de diversos melhoramentos foi progressivamente possível reduzir a constante para $C = e^{3100}$. A prova agora apresentada funciona para $n > 10^{30}$. A verificação da conjetura para os números ímpares $n < 10^{30}$ foi feita com o auxílio do computador [3].

3. PRIMOS GÉMEOS AFASTADOS

Teorema 2.
$$\liminf_{n\to\infty} (p_{n+1} - p_n) < 7 \times 10^7,$$
onde p_n é o n-ésimo primo.

O segundo resultado do dia 13 de maio de 2013 sobre números primos é ainda mais importante do que o anterior e diz-nos algo sobre a distância que separa dois números primos consecutivos. Se observarmos os primeiros elementos da sequência dos números primos, podemos ficar com a ideia errada de que os saltos de um número primo para o seguinte são sempre inferiores a 10. No entanto, sabemos que existem pares de primos consecutivos a uma distância arbitrariamente grande. Por exemplo, todos os inteiros no intervalo [100! + 2, 100! + 100] são números compostos. Queremos saber se, ainda assim, existem infinitos pares de primos muito próximos. Da densidade dos números primos resulta que o n-ésimo primo p_n salta em média $\ln(p_n)$ até ao primo que lhe sucede, aproximadamente três vezes o número dos seus dígitos. A questão está em saber se os saltos *pequenos* tão frequentes no início tendem ou não a desaparecer. Uma famosa conjetura convida-nos mesmo a acreditar que existem saltos mínimos.

Conjetura (Primos gémeos). *Existem infinitos pares de primos que distam duas unidades.*

O surpreendente resultado de Yitang Zhang é um primeiro e decisivo passo na resolução da conjetura dos primos gémeos, ao mostrar a existência de infinitos pares de primos que distam no máximo 7×10^7. A demonstração foi submetida aos *Annals of Mathematics* em abril de 2013 e já foi aceite para publicação. Em 2005, Goldston, Pintz e Yildirim chegaram a acreditar que tinham resolvido o problema dos saltos pequenos nos números primos. Conseguiram na altura mostrar que existiam sempre saltos com ordem de grandeza $\epsilon \ln(p_n)$, para qualquer $\epsilon > 0$, isto é, infinitos pares de primos consecutivos afastados arbitrariamente da média. A demonstração agora apresentada aproveita as ideias de Goldston, Pintz e Yildirim e outros resultados de teoria analítica dos números.

Yitang tem 50 anos, vive nos EUA e era até aqui relativamente desconhecido, tendo apenas dois artigos científicos publicados. Não tem sequer uma posição permanente numa universidade, e chegou mesmo a trabalhar numa loja de *fast-food*. Apesar das dificuldades, nunca deixou de pensar em problemas de matemática interessantes. O seu exemplo servirá certamente para nos recordar a todos da importância de sermos persistentes no nosso próprio trabalho. Esperemos ainda que no futuro este resultado do matemático Yitang Zhang não venha a ser designado por *teorema chinês dos primos*, em sintonia com o que infelizmente fazemos com outro resultado clássico de Teoria dos Números.

O matemático Ben Green, depois de conhecer a complexidade das ferramentas usadas por Yitang Zhang na sua prova, comentava com um misto de desconfiança e admiração que: "A demonstração de Zhang para o conjunto dos saltos majorados nos primos utiliza uma estimativa das somas de Klooterman, a qual depende da demonstração de Deligne da Hipótese de Riemann. Isto é assustador – sem toda a máquina de Grothendieck não podemos simplesmente obter o resultado. Será que existe alguém capaz de entender todos os ingredientes da demonstração? Duvido muito." [1]

Em todo o caso, neste momento o problema já despoletou mais um projeto de colaboração: foi criado o problema polymath8, a 4 de junho, com o intuito de compreender a demonstração de Zhang e de melhorar o limite superior do salto mínimo, que, depois de algum trabalho subsequente ao de Zhang, já é de 4,802,22.[2]

Por enquanto, o resultado dos saltos pequenos dos primos terá de se apoiar nos ombros de gigantes; terá de passar mais algum tempo até que seja possível entender em detalhe todos os ingredientes do argumento. E talvez nessa altura os pequenos saltos dos primos sejam tão evidentes como $2 + 2 = 4$.

REFERÊNCIAS

[1] Goldston, Daniel A., Pintz, János, Yildirim, Cem Y., "Primes in tuples. I.". *Ann. of Math.* (2) 170 (2009), no. 2, 819-862.

[2] H. A. Helfgott. *Major arcs for Goldbach's problem*. Preprint ar- Xiv:1305.2897.

[3] H. A. Helfgott and D. Platt. *Numerical verification of ternary Goldbach*. Preprint.

[4] I. M. Vinogradov. "Representation of an odd number as a sum of three primes". *Dokl. Akad. Nauk*. SSR, 15, 291-294 (1937).

[5] Yitang Zhang. "Bounded gaps between primes". *Ann. of Math*. (2013).

[1] "[Maths post] Zhang's proof of bounded gaps between primes uses an estimate for sums of Kloosterman sums that requires the full force of Deligne's proof of the Riemann hypothesis. This blows my mind - without the whole Grothendieck machine one simply doesn't get the result. Also, is there any single person who has understood all the ingredients of the proof? I very much doubt it."

[2] *http://polymathprojects.org*