Sobre o funcionamento do planímetro e o cálculo prático de áreas irregulares[1]

Carlos Sarrico

CMAF, Universidade de Lisboa

csarrico@ptmat.fc.ul.pt

[1]Conferência proferida pelo autor: (1) no Museu Nacional de História Natural e da Ciência, no dia 27 de setembro de 2012, integrada no ciclo de conferências "A Raíz do Cálculo"; (2) na Faculdade de Ciências de Lisboa, no dia 9 de abril de 2013, integrada nas atividades promovidas pelo *Clube de Matemática C-infinito*.

Conheça um instrumento mecânico que serve para medir áreas planas e reveja os seus conhecimentos sobre funções de várias variáveis ao mesmo tempo que compreende o seu espantoso funcionamento.

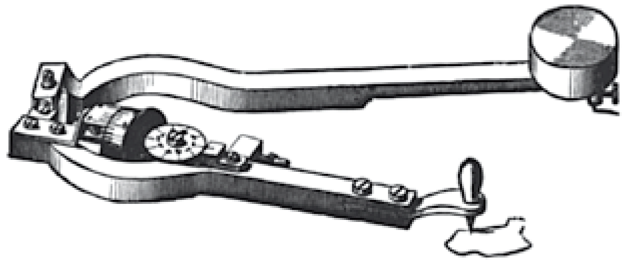

Figura 1: Planímetro polar de Amsler.

Vamos estudar o funcionamento mecânico de um instrumento chamado planímetro polar, que permite medir a área de um domínio plano interior a um contorno irregular.

Os conhecimentos de Análise Matemática inerentes à compreensão completa de tal funcionamento situam-se ao nível de um curso de Cálculo de várias variáveis e constitui um excelente exercício para alunos e professores de tais matérias, uma vez que exige o conhecimento:

- do método dos infinitésimos constantemente usado nas aplicações,
- do produto interno de vetores e sua interpretação geométrica,
- do integral duplo e sua relação com a área de um domínio plano,
- do integral de linha e sua relação com o problema mecânico da roda que sofre rotação e arrasto simultaneamente,
- do teorema de Green para a transformação do integral de linha no integral duplo,
- da derivação implícita de funções de mais de uma variável,
- da interpretação de um determinante 2×2 como área de um certo paralelogramo.

Assim sendo, não podemos dizer que se segue um texto de compreensão rápida e simples, mas vale a pena tentar uma leitura atenta não só pelo acréscimo de conhecimentos de Cálculo que possibilita como também pela beleza mecânica intrínseca do funcionamento de tal instrumento.

Existem muitos tipos de planímetros. O mais vulgar é, sem dúvida, o chamado planímetro polar de Amsler (1854) representado na figura 1. É constituído por duas hastes de comprimento r e s, articuladas no ponto (u,v), tendo um polo fixo (na origem das coordenadas) e uma extremidade no ponto (x,y) que vai percorrer o contorno Λ do domínio plano A (ver figura 2). Uma roda com eixo na haste de comprimento r (não representada na figura 2 mas identificável na figura 1) assenta sobre o plano onde está desenhado o domínio A.

Esta roda, arrasta-se sobre este plano e/ou efetua um movimento de rotação sobre o seu eixo, à medida que a extremidade (x,y) do planímetro percorre o contorno Λ. Ligado a esta roda existe um contador mecânico que permite uma contagem bastante rigorosa do número n (real) de voltas que a roda deu sem arrasto. A rotação da roda em torno do seu eixo mede-se em voltas, sendo uma volta igual ao comprimento do perímetro da roda. O contador mede o número de voltas usualmente a menos de um milésimo do perímetro da referida roda.

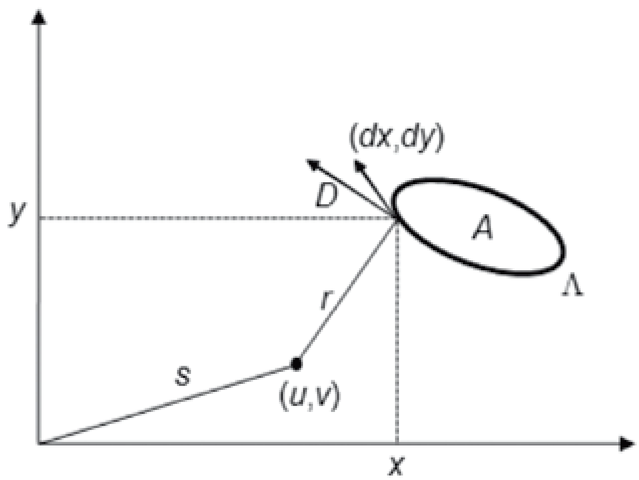

Figura 2: Vista esquemática, em projeção horizontal de um planímetro formado por duas hastes de comprimento r e s articuladas no ponto (u,v). O polo do planímetro está fixo no ponto (0,0). A extremidade (x,y) percorre o contorno Λ. A roda do planímetro, que não está representada na figura, tem o seu eixo na haste de comprimento r.

Seja *(dx,dy)* o deslocamento elementar da extremidade *(x,y)* sobre o contorno Λ. A rotação elementar da roda correspondente a este deslocamento é a medida da projeção do vetor *(dx, dy)* sobre a direção do vetor unitário D perpendicular à haste de comprimento r (eixo da roda) cujo vetor diretor é $(x-u, y-v)$: notemos que a roda não efetua nenhuma rotação quando o deslocamento *(dx, dy)* se dá na direção da haste de comprimento r porque arrasta na direção do seu eixo; porém, a rotação da roda dá-se sem qualquer arrasto quando o deslocamento *(dx, dy)* se processa na direção D, perpendicular ao eixo da roda. Para deslocamentos *(dx, dy)* não coincidentes com os dois agora descritos, a roda efetua alguma rotação com algum arrasto. Assim, a rotação elementar da roda correspondente ao deslocamento elementar geral *(dx, dy)* é dada pelo produto interno *(dx, dy)*. D. Como

$$D = \frac{1}{r}(-(y-v), x-u),$$

então o número n de voltas que a roda dá sem arrasto é a soma de todas estas rotações elementares, isto é,

$$n = \int_\Lambda (dx, dy).D = \frac{1}{r}\int_\Lambda (-(y-v), x-u).(dx, dy) =$$

$$= \frac{1}{r}\int_\Lambda -(y-v)dx + (x-u)dy.$$

Sendo *(u,v)* função de *(x,y)*, isto é, *u=u(x,y)* e $v = v(x,y)$, este integral de linha pode exprimir-se num integral duplo sobre o domínio plano A cujo contorno é Λ. Assim, por aplicação do teorema de Green, resulta

$$n = \frac{1}{r}\int_A \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} + 1 - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy =$$

$$= \frac{2}{r}\int_A dx\, dy - \frac{1}{r}\int_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Como se tem

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2, \qquad (1)$$

$$u^2 + v^2 = s^2, \qquad (2)$$

por derivação implícita obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v(x-u)}{vx - yu},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{u(y-v)}{vx - yu},$$

uma vez que $vx - yu \neq 0$ (ver a observação antes da nota histórica). Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 1,$$

e portanto

$$n = \frac{1}{r}(\text{área de } A),$$

ou seja,

$$\text{área de } A = rn. \qquad (3)$$

Por consequência, o valor da área é exatamente igual ao produto do comprimento r da referida haste pelo número n de voltas que a roda efetua sem arrasto (embora a roda arraste enquanto a extremidade do planímetro percorre o contorno de A!).

A exatidão deste resultado contrasta com alguns processos mais modernos, utilizados para o mesmo fim, e baseados na digitalização da imagem do domínio; estes últimos são mais dispendiosos e não são teoricamente exatos.

Por exemplo, se quisermos comprar ou vender uma quinta com o terreno avaliado num certo preço por metro quadrado, teremos de saber com suficiente exatidão a área da quinta. Um método expedito consiste no uso do planímetro sobre a planta topográfica onde se encontra traçado o contorno da quinta. O planímetro não é só usado em topografia, é também usado em muitas situações técnico-científicas que requerem a medição de áreas limitadas por contornos irregulares desde a engenharia à biomedicina.

Observação: Note-se que a expressão $vx - yu$ que figura no denominador das frações se pode escrever na forma de um determinante,

$$vx - yu = \begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix},$$

e que o valor absoluto deste se pode interpretar como a área do paralelogramo gerado pelos vetores *(x,y)*, e *(u,v)*. Assim, enquanto a extremidade do planímetro percorre o contorno, será sempre $vx - yu \neq 0$ porque $vx - yu = 0$ corresponde à área nula de tal paralelogramo (ver a figura 2), isto é, à coincidência das duas direções *(x,y)* e *(u,v)*; tal, porém, não pode acontecer na prática porque o planímetro ficaria "esticado" com as duas hastes no prolongamento uma da outra! Deste modo se garante também, (na vizinhança de cada ponto do contorno e pelo teorema da função implícita) a existência de *(u,v)* como função de *(x,y)*, definida implicitamente pelas relações (1) e (2), o que já era mecânicamente evidente.

NOTA HISTÓRICA:

O primeiro planímetro foi inventado por Johann Martin Hermann em 1814. Seguiu-se o planímetro ortogonal de Titto Gonnella (1784-1867), professor em Florença, que publicou a sua invenção em 1825, mas só em 1850 foi reinventada e introduzida no mercado pelo engenheiro suíço Kaspar Wetli (1822-1889). Em 1854 foi inventado o planímetro polar pelo matemático suíço Amsler o qual ainda hoje perdura em versões mecânicas e eletrónicas. As versões eletrónicas baseiam-se exatamente no mesmo princípio que as mecânicas. Além dos descritos, existem ainda outros tipos de planímetros. Físicos notáveis, como Lord Kelvin (1824-1907) e Maxwell (1831-1879), interessaram-se também por este instrumento, tendo introduzido melhorias no seu funcionamento mecânico.

REFERÊNCIAS

R. W. Gatterdam, "The planimeter as an example of Green's theorem", *American Mathematical Monthly*, 88: 701-704, 1981.

L.I.Lowell, "Coments on the polar planimeter", *American Mathematical Monthly*, 61: 467-469, 1954.

Guido Ascoli, "Vedute Sintetiche Sugli Strumenti Integratori", *Rend. Sem. Mat. Fis.* Milano, 18: 36, 1947.

SOBRE O AUTOR

Carlos Sarrico é licenciado em Engenharia Geográfica e doutorado em Matemática. Foi professor na Faculdade de Ciências de Lisboa e na Academia Militar. Trabalha atualmente no Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais, onde faz investigação na linha "Sistemas Hiperbólicos e Singularidades em Equações Diferenciais às Derivadas Parciais". Além da tese de doutoramento, é autor de três livros e de diversos artigos em revistas especializadas e de divulgação.