A Terra é um Pião

Eduardo Marques de Sá
Universidade de Coimbra
emsa@mat.uc.pt

No rescaldo de 2013, ano da Matemática no Planeta Terra, apresenta-se uma descrição breve e muito leve de um assunto matemático de dificuldade técnica elevada: a precessão dos equinócios. Fala-se da sua descoberta no séc. II a.C. e da justificação físico-matemática desse fenómeno concebida na segunda metade do séc. XVIII. A teoria que Leonhard Euler criou a esse propósito explica também o curioso movimento dos piões de brincar, não sendo por isto que as coisas se tornaram simples de entender.

ANO SÓTICO

O nosso planeta não é muito diferente dos outros no que toca às voltas que dá em torno do Sol e em torno do seu próprio eixo. Desde há milénios que esses movimentos se detetam por medição do que se observa: os movimentos aparentes do Sol, da Lua e das estrelas, fixas e errantes.

Um exemplo interessante é o movimento anual da Terra em torno do Sol e o modo como isso se avaliava e media na Antiguidade. Cada estrela nasce e se põe tal qual a estrela Sol, em virtude do movimento diurno da Terra em torno do seu eixo; quando certa estrela nasce ao mesmo tempo que o Sol (melhor, uns minutos antes de o Sol a ofuscar) diz-se que ela tem o seu nascer heliacal. No antigo Egito era hábito marcar o início do ano de acordo com o nascimento heliacal da estrela Sirius, que os egípcios designavam por Serpet e os gregos por Sotis, a estrela mais brilhante do firmamento. A manhã em que Sotis nascesse imediatamente antes do Sol marcava o início do ano sótico. Nos dias que se iam seguindo a esse início de ano, Sotis nascia cada vez mais cedo do que o Sol; por exemplo, no décimo dia do ano sótico, ela nasce cerca de 40 minutos antes do Sol. O tempo decorrido entre dois nasceres heliacais consecutivos de Sotis era o ano sótico[1]. Assim se observou que o Sol descreve sobre o fundo estrelado do céu uma trajetória que é sempre a mesma ano após ano; ele atravessa sempre as mesmas constelações estelares que vieram a receber nomes bem familiares, os do Zodíaco, o zoológico do céu: Carneiro, Touro, Gémeos, Caranguejo, Leão, Virgem, Balança, Escorpião, Sagitário, Capricórnio, Aquário e Peixes, regressando ao Carneiro, por esta ordem.

Em vez de 'ano sótico' usamos ano sideral, definido como o período do movimento da Terra em torno do Sol, quando observado no sistema das "estrelas fixas". De facto, a medição dos movimentos planetários faz-se relativamente a um referencial, dito *sideral*, cujos pontos de referência são objetos muito distantes de nós, tão distantes que os seus movimentos não são detetáveis pelos sistemas de medida utilizados. Hoje, a medição de movimentos das estrelas mais próximas é feita relativamente a sistemas de referência ancorados em outras estrelas ou objetos similares bem mais distantes; os mais utilizados são os *"quasars"*, objetos galácticos antiquíssimos distantes de nós na ordem dos milhares de milhões de anos luz.

ANO TRÓPICO

Para os astrónomos da Antiguidade, a Terra ocupava o centro do mundo, envolta pela esfera celeste onde residiam as estrelas, como a figura 1 ilustra. Este é um modo simplificado de descrever o chamado sistema geocêntrico introduzido por Platão e Aristóteles e levado por gerações de astrónomos a um estado de complexidade e fiabilidade notáveis, culminando com a obra *Almagesto*, de Ptolemeu, no séc. II da nossa era. A figura 1 mostra a eclítica a ponteado amarelo; a negro estão o eixo e o equador da esfera celeste que se obtêm prolongando o eixo e o equador terrestres; dantes, era a esfera que rodava em torno do seu eixo reproduzindo o movimento diurno

[1] Claro que havia erro substancial na definição de cada ano individual, pois o Sol e Sírius não estão à mesma altura em nasceres heliacais consecutivos. Mas um astrónomo que acumulasse muitos anos de observações herdadas dos seus antepassados poderia estimar o ano sótico com uma precisão muito grande: sendo o erro de avaliação do início do ano sótico cerca de um dia, se o nosso astrónomo utilizasse o registo do número de dias acumulado em 200 anos sóticos, obteria uma estimativa do ano sótico com erro da ordem de 1/200 do dia, isto é, 7,2 minutos.

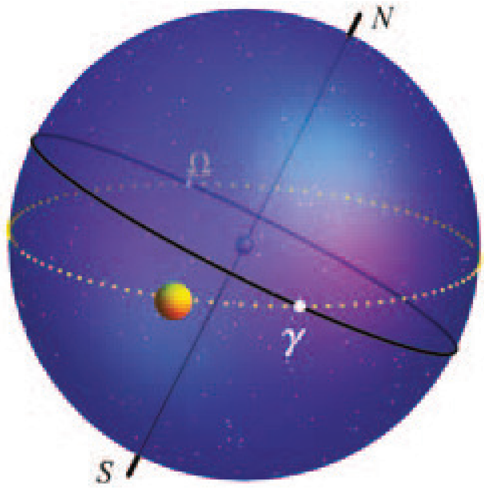

Figura 1: O ponto vernal.

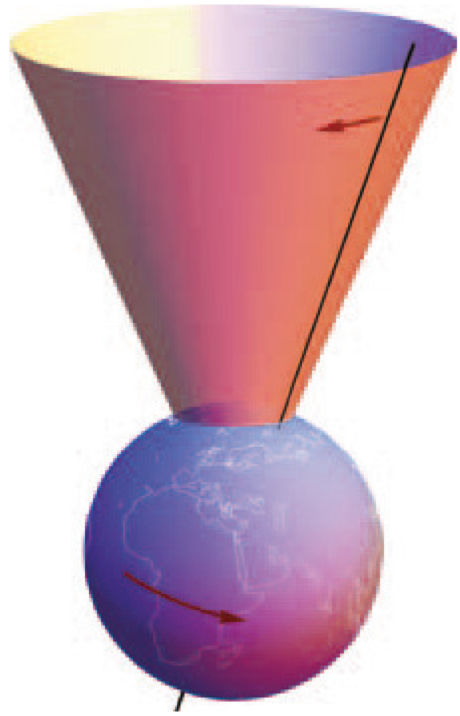

Figura 2: Rodando como um pião.

das estrelas, hoje vemo-la como entidade geométrica fixa. A branco, com a letra γ, está o ponto vernal, um dos pontos de interseção da trajetória solar com o equador celeste; em posição diametralmente oposta está o ponto outonal, Ω.

A bola amarela do Sol descreve a sua trajetória anual no sentido direto para quem observa de norte e, na figura, está a um mês de chegar a γ. O momento em que ocupa γ chama-se equinócio de março; quando chega ao ponto da eclítica à distância máxima acima do equador, dá-se o solstício de junho; chega ao ponto outonal no equinócio de setembro; passados cerca de três meses, dá-se o solstício de dezembro, depois do qual o Sol volta ao ponto vernal. O tempo que decorre entre duas passagens consecutivas pelo ponto vernal é o chamado *ano trópico*, o das estações.

Nos primórdios da astronomia, acreditava-se que ano trópico e ano sideral tinham igual duração. Mas Hiparco de Rodes (190-120 a.C.), considerado pai da trigonometria e maior astrónomo da Antiguidade, descobriu que isso não era assim, estimando que o ano trópico é mais curto que o sideral em pouco mais de 18 minutos e meio, diferença notavelmente próxima do valor moderno, de 20 minutos e 23 segundos.

Chama-se a isto a *precessão dos equinócios* pois, começando a contagem do tempo com o Sol no ponto vernal, o próximo equinócio vernal precede a completação pelo Sol duma volta inteira à eclítica.

DE QUE SIGNO SOU?

Voltando à figura 1, a precessão dos equinócios significa um lento deslocamento do ponto vernal sobre a eclítica, no sentido retrógrado para quem observa de norte, isto é, em sentido oposto ao da circulação do Sol. Esse movimento de γ faz-se a uma velocidade de cerca de 50 segundos de arco por ano; umas contas simples mostram que, se essa velocidade se mantiver, o ponto vernal dará uma volta inteira à eclítica em cerca de 26 milénios, e vai percorrendo as constelações do Zodíaco pela ordem inversa à do percurso solar. No tempo de Hiparco, γ estava sobre o primeiro ponto do Carneiro, isto é, na fronteira entre Carneiro e Peixes; durante os dois mil e tal anos subsequentes atravessou os Peixes e encontra-se hoje na porta de entrada do Aquário.

Os astrólogos de hoje consideram que eu sou Escorpião por ter nascido no dia 10 de novembro. De facto, no corres-

Figura 3: Trajetória do polo norte celeste.

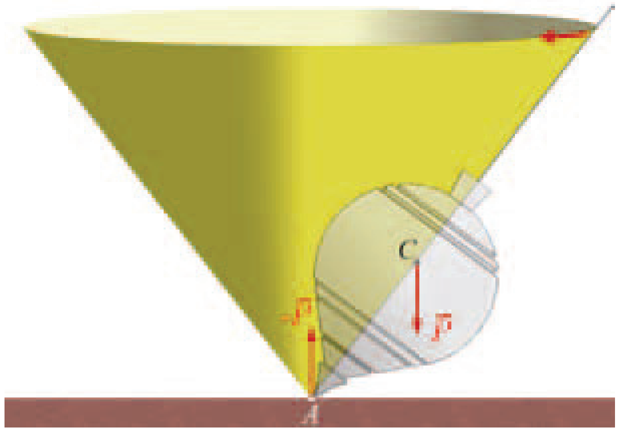

Figura 4: Pião num campo gravítico.

pondente a esse dia, ao tempo de Hiparco, o Sol estava a meio da constelação do Escorpião; mas, no dia em que nasci, mais de 21 séculos depois de Hiparco, o Sol estava bem no meio da Balança. Parece ser esta a única influência que a precessão dos equinócios tem na minha vida; afinal não sou tão ruim quanto os horóscopos das revistas de lazer querem fazer-me crer.

A TERRA E O PIÃO

Hoje sabemos algo que não estava ao alcance de Hiparco: o ângulo dos planos do equador e da eclítica é constante, melhor dizendo, tem pequenas oscilações à volta dum valor médio de 23° 27′, chamado *obliquidade da eclítica*, que a teoria matemática prevê se mantenha assim *per seculum a seculorum*. Nestas condições, o movimento de precessão é fácil de descrever, como mostra a figura 2: a Terra roda em torno do seu eixo, o qual, solidário com o equador, roda em torno dum eixo perpendicular ao plano da eclítica e descreve a superfície cónica aí representada. Note-se que é precisamente isso que faz um pião lançado sobre um plano horizontal como na figura 4. O pião roda em torno do seu eixo de simetria e esse eixo, por sua vez, roda em torno do eixo vertical que passa no ponto de apoio *A*. A este comportamento do pião chama-se, por extensão, *movimento de precessão*.

No tempo de Hiparco e durante milénio e meio, a precessão foi vista como um movimento especial da esfera celeste ou, melhor, duma das muitas esferas celestes concêntricas que desde a Antiguidade Clássica se foram criando para descrever os movimentos dos corpos visíveis no céu. A primeira referência à precessão como movimento do eixo da Terra parece ter sido de Nicolau Copérnico, na obra *Sobre as revoluções das esferas celestes*, de 1543, onde introduziu o seu famoso sistema heliocêntrico. A mudança de direção do eixo da Terra faz com que o polo norte celeste (*N*, na figura 1) mude com o tempo. A figura 3 mostra uma projeção da trajetória do polo norte celeste visto da Terra. Ele descreve a circunferência amarela no sentido direto; a marca 0 indica o início da nossa Era, e 13000 o meio curso precessional. A nossa Estrela Polar estará na sua máxima proximidade do polo norte, a cerca de 27' de grau, no início do séc. XXII. No tempo da construção das grandes pirâmides (c. 3000 a.C.) a "estrela polar" era α do Dragão. A figura mostra que, daqui a 11 milénios, a brilhante Vega indicará o norte.

A precessão dos equinócios foi um mistério sem justificação científica por quase dois milénios após a descoberta de Hiparco. Foi Jean d'Alembert, em 1749, o primeiro a dar uma solução matemática para o problema. Em diversos textos publicados entre 1736 e 1765, Leonhard Euler estabeleceu as equações, ditas *de Euler*, que determinam de forma completa o modo como se movem os sólidos. Em particular, permitiram explicar como se movem os piões de brincar, o pião-planeta onde vivemos, os discos e dardos lançados por um atleta, etc. Aqui, só será possível tocar ao de leve a teoria matemática. Quando um pião está em contacto com o solo, o seu peso $\vec{P}$ e a reação $-\vec{P}$ do solo no ponto de apoio produzem um binário que tende a forçar o eixo do pião a mudar a sua direção. Se o pião não está em rotação, o eixo roda em torno de A e descreve um ângulo de queda paralelo ao plano do binário. Mas uma rotação rápida em torno do eixo de simetria fá-lo reagir de modo muito estranho ao binário produzido pela gravidade: o eixo do pião começa a descrever um ângulo de vértice A e plano perpendicular ao plano do binário $(\vec{P}, -\vec{P})$. Daí que o eixo do pião descreva uma superfície cónica de revolução, de eixo vertical e vértice A.

TORÇÃO E ROTAÇÃO

Consideremos um sólido com centro de massa C a que chamamos, apenas, *centro* do sólido. Dada uma força $\vec{F}$ aplicada num ponto X do sólido, o produto vetorial $\overrightarrow{CX} \wedge \vec{F}$ designa-se por *torção* de $\vec{F}$. Um campo de forças origina uma força aplicada em cada ponto do sólido; a soma de todas estas forças designa-se por *resultante*, ou *força total*; a soma das torções de todas as forças do campo exercidas sobre o sólido é a t*orção total*[2].

UM PIÃO DE MAXWELL. No nosso campo gravítico uniforme, o centro dum sólido é o único ponto que satisfaz a propriedade seguinte: se suspendermos o corpo por um ponto, o centro estará sobre a vertical do ponto de suspensão qualquer que este seja. O centro nem sempre é fisicamente acessível, mas há casos em que é. Nesses casos, se o corpo se apoia no centro ele fica numa situação de equilíbrio *indiferente*: mudando a posição de apoio no centro, mantém-se o equilíbrio. A ideia de criar um pião apoiado no centro de massa ocorreu, em 1859, a James Maxwell, o famoso criador das leis matemáticas do eletromagnetismo.

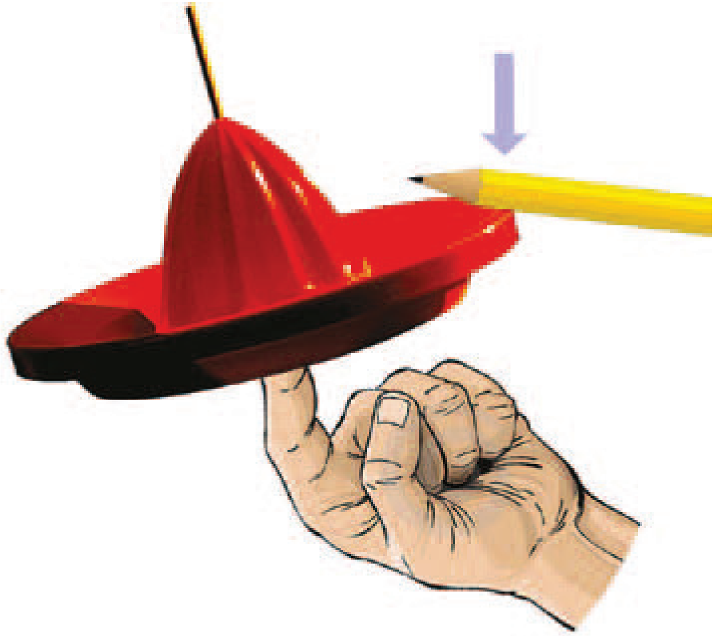

Figura 5: Pião espremedor. O palito axial deve ser maior do que a figura sugere e a sua ponta acerada deve cravar-se na polpa do dedo.

Trabalhos manuais. O centro dum espremedor de citrinos como o da figura 5 está na concavidade do espremedor. Perfure com um palito de espetada que entra no vértice do espremedor e vai a uma profundidade q.b. de modo a que a ponta do palito fique muito próxima do centro do espremedor. Para saber se a ponta já está no centro, teste com um dedo, como na figura, procurando o centro por tentativas; depois fixe com super-cola e calibre, acrescentando pequenas massas adesivas até detetar equilíbrio indiferente. Acaba de fabricar um pião de Maxwell!

Experiências.

(a) Faça-o girar com boa velocidade, rolando o palito com a sua mão livre. O eixo de rotação, que pode alterar manipulando o palito, mantém-se estável, em qualquer posição, sem precessão!

(b) Percuta o bojo do pião com uma pancada seca como a flecha indica; observa-se um outro movimento, dito *nutação*, ou *precessão livre*, que rapidamente desaparece por ação do atrito no apoio do palito.

(c) Pressione o bojo, ao de leve mas continuadamente, com um lápis, por exemplo, no sentido da flecha, e verá o "milagre matemático" em ação! O eixo-palito, em vez de rodar no plano do papel, rodará num plano perpendicular.

(d) Encoste ao palito (próximo do topo) um objeto irregular qualquer mantido imóvel (a sua mão de dedos abertos, por exemplo); verá o *efeito de Maxwell*: o palito 'cola-se' ao objeto e rola sobre ele! Esta colagem é corolário do milagre matemático que vamos referir na página seguinte.

Por ação de um campo de forças, o centro do sólido desloca-se e o sólido roda. Euler demonstrou que podemos estudar separadamente esses dois efeitos: por um lado, o deslocamento do centro e, por outro, a rotação do sólido em torno dum eixo, como se o centro estivesse parado. Esta decomposição do movimento faz parte da nossa experiência visual televisiva, quando um operador de câmara persegue, por exemplo, uma bola de futebol ou um dardo em pleno voo; num *follow up* bem feito, o centro do projétil parece parado no ecrã, sendo bem visível a rotação em torno dum eixo que pode variar por ação de forças aerodinâmicas. O sistema que esse tipo de filmagem invoca é o sistema dito *baricêntrico*, cuja origem é o centro do sólido e os eixos são dirigidos para estrelas fixas, como nos sistemas siderais. Assim, supomos que o eixo de rotação dum sólido passa pelo seu centro.

A resultante $\vec{R}$ das forças aplicadas ao sólido determina o movimento do seu centro de massa: este desloca-se como se fosse um ponto material único, com massa igual à massa do corpo, atuado por $\vec{R}$. É este teorema que legitima representar o peso (força resultante do campo gravítico atuando num corpo) como força aplicada no centro *C* dum sólido, como na figura 4.

Pelo seu lado, a torção total dum campo de forças está intimamente ligada com a rotação adquirida pelo sólido. Se um corpo roda é porque sobre ele se exercem ou exerceram forças de torção não nula. Se um corpo que não esteja a rodar for atuado por um campo de torção total nula ao longo do tempo, o centro poderá deslocar-se de forma muito complexa mas não terá rotação.

LANÇAMENTO DUM PIÃO

Quando lançamos um pião como o da figura 6, os nossos dedos exercem sobre ele um binário, $(\vec{F}, -\vec{F})$, com uma torção $\vec{T}$.

Se o lançamento for "perfeito", isto é, se o plano do binário for perpendicular ao eixo do pião, este rodará com eixo de rotação coincidente com o eixo de simetria; quer dizer $\vec{T}$ produz uma rotação de eixo paralelo à torção $\vec{T}$ [3]. A rotação

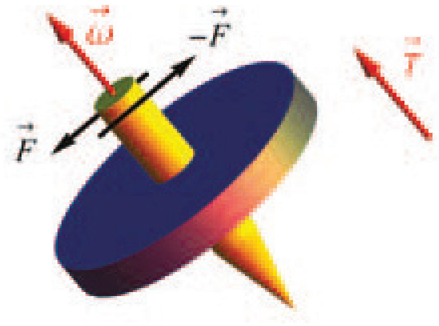

Figura 6: Torção e rotação.

costuma representar-se vetorialmente como o $\vec{\omega}$ da figura: trata-se dum vetor com a direção do eixo de rotação, com módulo igual à velocidade angular do movimento rotativo e sentido dado pela "regra do saca-rolhas", a mesma que adotámos para o produto vetorial[4].

Experimente lançar o pião ao ar, da forma descrita, e observe o voo do pião. Para este efeito, o campo gravítico terrestre pode considerar-se uniforme o que implica o anulamento da torção total. Então $\vec{\omega}$ manter-se-á invariável e, durante o voo, o centro do pião descreve a conhecida parábola de subida e queda dos graves. A situação modifica-se radicalmente quando a ponta do pião encontra um plano horizontal de apoio; a partir desse momento ele passa a descrever o movimento de precessão já descrito: $\vec{\omega}$ roda em torno dum eixo vertical.

Porquê? A explicação de Euler é uma dedução difícil feita com base na axiomática newtoniana do movimento dos corpos. Ela é, dita de forma pouco rigorosa: se um pião em rotação rápida $\vec{\omega}$ for sujeito a uma torção $\vec{T}$, $\vec{\omega}$ varia com o tempo e a sua derivada é, em cada instante, paralela a $\vec{T}$ e tem a direção de $\vec{T}$ nesse instante. Na figura 4, se $\vec{\omega}$ tiver origem

[2] Estamos a supor que o sólido é constituído por um número finito de átomos. A matemática do contínuo é algo mais complicada.

[3] A arte de bem lançar um pião consiste precisamente em exercer sobre ele um binário de plano "o mais possível" perpendicular ao eixo do pião. Após um mau lançamento, o pião iniciará a sua rotação em torno dum eixo que não o de simetria, produzindo uma oscilação indesejada que, em caso de inabilidade extrema, o pode levar a uma cambalhota frustrante.

[4] Na figura 6, o binário exercido faz rodar o pião no sentido direto para quem observa de cima. Se o eixo fosse um saca rolhas tradicional, este progrediria no sentido de $\vec{\omega}$, como na figura.

A (no plano do papel) e direção de A para C , a extremidade de $\vec{\omega}$ mover-se-á na direção e sentido de $\vec{T}$, isto é, foge para lá da folha de papel! Trata-se duma reação anti-intuitiva, no sentido em que falham as tentativas de a explicar noutros termos e de modo convincente. O famoso físico Richard Feynman chamou *milagre matemático* à precessão dos piões![5]

COMO É A TERRA POR DENTRO?

Enquanto a forma e tamanho da Terra são conhecidos desde a Antiguidade, a sua densidade média só foi determinada no séc. XVIII. Quanto ao tamanho, os números hoje aceites são: diâmetro equatorial 12756 km e diâmetro polar 12714 km, o que dá um achatamento na ordem dos 0,33%. O achatamento, ou desvio de esfericidade, obtém-se, para qualquer bola, calculando a diferença Δ entre o maior e o menor diâmetro, e dividindo Δ pelo maior diâmetro. Para comparar, referira-se que a *Jabulani* do Mundial de 2010, tida como a bola de futebol "mais perfeita do mundo", tinha, à saída de fábrica, um desvio de esfericidade *triplo* do da Terra.

O nosso planeta tem massa total de cerca de 6×10^{24} kg e a densidade média ronda os 5.5. Mais interessante que os números é o modo como essa massa se distribui. O planeta é constituído por várias camadas de densidades distintas, camadas essas também aproximadamente esféricas e concêntricas. A densidade cresce da crusta para o centro, entre valores aproximados de 3 a 13. O modelo matemático mais simples aqui adotado é o duma Terra esférica sólida com simetria radial, isto é, onde a densidade em cada ponto depende apenas da distância ao centro da Terra; portanto, ela é união duma infinidade de cascas (= superfícies) esféricas, com densidade constante em cada casca. O modelo mais complicado que aqui interessa é o duma Terra que resulta do modelo esférico achatando todas as cascas segundo o eixo de rotação; mais precisamente, as cascas são elipsoides de revolução, concêntricos e semelhantes entre si, sendo a densidade constante em cada casca elipsoidal.

O modo ingénuo de calcular a massa da Terra com um modelo destes é partir o modelo em pequenos pedaços e somar as massas desses pedaços. Podemos parti-lo usando, por exemplo, uma malha cúbica de pequenos cubinhos de 1 cm^3 cada; podemos também estimar a força gravítica que o Sol exerce sobre a Terra, somando as forças gravíticas exercidas sobre cada cubinho. Estes cálculos são impraticáveis por estarem envolvidos mais de 10^{27} cubinhos, mas o que conta é a ideia, já utilizada noutros contextos por Arquimedes, que viria a culminar na criação do cálculo integral moderno nos séculos XVII e XVIII. O que disto interessa intuitivamente fixar é que a cada ponto X associaremos uma massa igual à dum cubinho centrado em X. Assim, se a densidade da casca a que X pertence for, digamos 7, a massa atribuída a X será 7 gramas.

NUMA TERRA ESFÉRICA...

Se a Terra fosse esférica de simetria radial, a ação do Sol (ou de qualquer outro corpo celeste) produziria um campo gravítico sem torção. A figura 7 mostra como isso se prova; o plano da eclítica é perpendicular ao plano da imagem e está representado pela linha vermelha horizontal; o centro do Sol encontra-se à direita, sobre a eclítica, a uma distância muito grande relativamente ao raio da Terra (cerca de 23 mil raios terrestres). Escolhido A , um ponto arbitrário da Terra, B denota o seu simétrico relativamente ao plano da eclítica; A' e B' são os pontos da Terra simétricos de A e B relativamente ao plano perpendicular ao da eclítica e que contém os centros da Terra e do Sol. Claro que, na figura, as imagens de A e A' (e as de B e B') coincidem. Estando os quatro pontos à mesma distância do centro da Terra e à mesma distância do Sol,

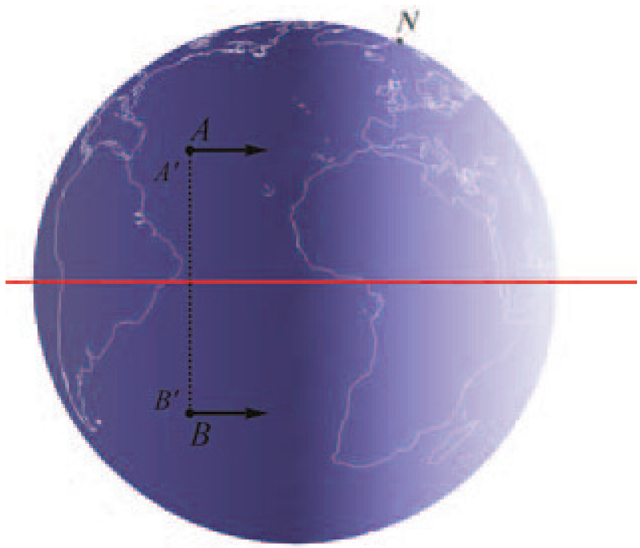

Figura 7: Terra esférica.

as forças exercidas sobre eles pelo Sol são iguais. Daí resulta que a torção relativa a essas quatro forças é nula e, portanto, que a torção total é nula. Conclusão, se a Terra tivesse esta forma perfeita, nem o Sol nem nenhum outro corpo celeste exerceria torção sobre a Terra e não existiria precessão dos equinócios.

NUMA TERRA ELIPSOIDAL...

A figura 8 apresenta o nosso planeta como elipsoide de achatamento muito pronunciado para se entender melhor a situação. O plano da eclítica está representado como na figura 7. O momento escolhido é o solstício de junho, com o centro do Sol do lado direito e no plano da figura; a linha vertical vermelha representa o plano de topo que passa pelo centro da Terra e é perpendicular à direção dos raios solares. Dada a distância a que o Sol está, podemos supor que a força gravítica que exerce sobre cada ponto material da Terra é paralela à eclítica e ao plano da figura. A esta distância, o campo gravítico solar é praticamente uniforme, mas não é uniforme; por exemplo, escolhido um ponto A sobre a Terra, seja B o ponto diametralmente oposto a A , e considerem-se os pontos A' e B' construídos de modo análogo ao da figura 7. Claro que as forças exercidas pelo Sol em A e A' (e em B e B') são iguais; mas as que se exercem em A e A' são de menor módulo do que as que se exercem em B e B' por estes estarem mais perto do Sol. Feitas as contas, as forças nestes quatro pontos produzem uma torção não nula perpendicular ao plano da figura, apontando para o leitor (do lado do ponto vernal). Esta conclusão vale para todos os A,B,A',B' que se projetam nos quadrantes pares determinados pelos eixos vermelhos da figura plana. Se considerarmos os dois gomos da Terra que se projetam nos quadrantes ímpares, a conclusão é: essas regiões do planeta contribuem com uma torção perpendicular ao plano da figura que aponta no sentido oposto ao da contribuição dos quadrantes pares. A torção total é a soma dessas duas contribuições e queremos saber qual dessas duas prevalece; parece ser claro que prevalece a contribuição dos quadrantes pares, pois neles se projeta maior quantidade de matéria terrestre do que nos quadrantes ímpares. Esta última frase não é um raciocínio matemático, apenas dá uma dica sobre a possibilidade de provar rigorosamente o teorema: no solstício de junho, a torção que o Sol exerce sobre a Terra é perpendicular ao plano da figura 8 e aponta para o ponto vernal.

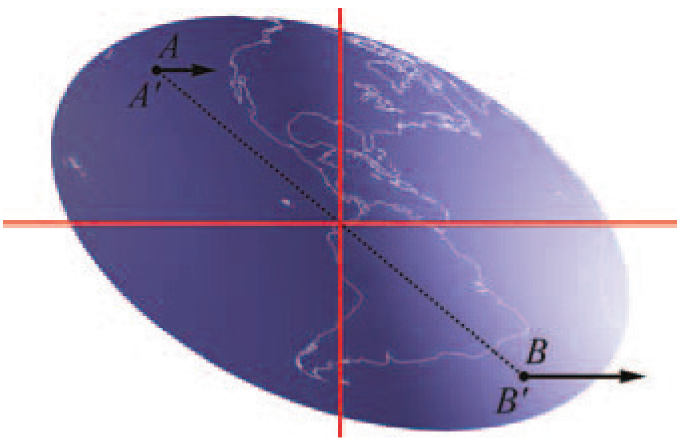

Figura 8: Terra achatada vista do ponto vernal.

No solstício de dezembro a conclusão é a mesma, como o leitor facilmente verificará imaginando, na figura 8, o Sol do lado esquerdo. Portanto,

num solstício, o Sol exerce sobre a Terra uma torção dirigida para o ponto vernal.

Deixa-se ao leitor o exercício de provar que

num equinócio, a torção total do campo gravítico solar é nula.

Este é apenas o início dum raciocínio analítico difícil que conduz a esta conclusão: no decorrer dum ano, a torção exercida pelo Sol não é uniforme, mas, no cômputo anual, ela é perpendicular ao plano da figura 8 e aponta para o ponto vernal.

Em termos ingénuos, é como se o Sol tentasse diminuir a obliquidade da eclítica, sem o conseguir, pois a Terra reage com uma precessão como manda o "milagre matemático" acima referido a propósitos dos piões. O raciocínio feito para o Sol pode repetir-se para a Lua e os planetas do sistema solar; como esses astros têm planos orbitais pouco inclinados em relação à eclítica, as suas ações de torção reforçam a do Sol.

QUAL O SENTIDO DA PRECESSÃO?

No caso dum pião de brincar assente sobre um plano horizontal, a teoria diz exatamente aquilo que o leitor pode obser-

[5] Cf. *The Feynman Lectures on Physics, Vol.I*, S20-3.

var experimentando. Se lançar o pião como na figura 6, o lançamento preferido dos esquerdinos, o pião rodará no sentido que $\vec{\omega}$ indica, ou seja, o sentido direto para quem observa de cima, e a precessão do eixo faz-se nesse mesmo sentido. Se fizermos o pião rodar no sentido retrógrado, a precessão será também retrógrada. Resumindo, para um pião assente sobre um plano horizontal, a precessão e a rotação em torno do eixo fazem-se no mesmo sentido.

Mas não é isso que a Terra faz, conforme representado na figura 2: para quem observa de norte, a rotação é direta e a precessão, retrógrada. Mas esta diferença não é significativa, como veremos.

Na figura 4, eliminemos mentalmente a faixa escura que representa a 'mesa' em que o pião está assente, mas mantendo a ligação no ponto A . O pião tem duas posições de equilíbrio: uma estável, quando C está na vertical de A abaixo de A, e outra instável, quando C está na vertical de A acima de A .

PIÕES DORMENTES. A posição de equilíbrio instável é dinamicamente estável se o pião for posto a rodar com uma velocidade angular suficientemente elevada. Todos temos a experiência de ver um pião dormir, isto é, rodar estavelmente com o eixo imóvel na posição vertical. O atrito no ponto de apoio vai retardando a rotação do pião que, em certo momento, deixa de dormir e entra em precessão: o eixo vai aumentando o ângulo que faz com a vertical e o ritmo de precessão aumenta na mesma proporção que o ritmo de rotação diminui, até que cai. Cada pião tem a sua velocidade angular crítica, acima da qual ele pode dormir e abaixo da qual não dorme; pelos meus cálculos, um pião como o da figura 4 tem uma velocidade angular crítica na ordem das 15 voltas por segundo; por isso esses piões precisam dum cordão ou doutro auxiliar de lançamento. Já o pião da figura 9, feito com um suporte de panelas, de corticite, e um palito de espetada, consegue dormir a velocidades de cerca de 2 voltas por segundo. O segredo está em que a velocidade crítica será tanto menor quanto mais achatado for o pião e menor for o seu pé(distância do centro ao ponto de apoio). Quando quiser comprar ou fazer um bom pião, lembre-se deste critério: ele deve ser chato e de pé curto.

Voltando à figura 4 sem a faixa escura, suponha que o pião tem rotação e precessão no sentido retrógrado para quem observa de cima. O atrito em A faz diminuir a velocidade de rotação e o ponto C vai baixando; quando estiver abaixo do ponto A, o observador vê o pião rodar no sentido direto e continua a ver precessão retrógrada! Em vez de imaginar a Terra como um pião tradicional de cabeça para baixo, experimente testar um brinquedo fascinante, um giroscópio como o da figura 10. Trata-se dum pião que pode ser apoiado no ponto S ou suspenso de N. Ponha-o a rodar como indica a figura, no sentido direto quando visto de norte, como a Terra. Se o apoiar em S, ele terá uma precessão em sentido direto. Se o suspender de N, a precessão será retrógrada, como no caso da Terra; o atrito vai retardando o pião e, decorrido algum tempo, S descreverá uma espiral descendente até o pião adormecer com S na vertical de N . Na Terra, temos o atrito das marés...

Irá o nosso planeta adormecer?

Irão acabar as estações do ano?

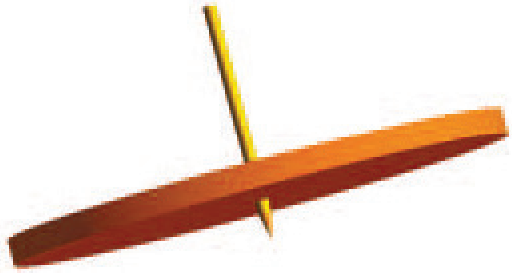

Figura 9. Pião dormente.

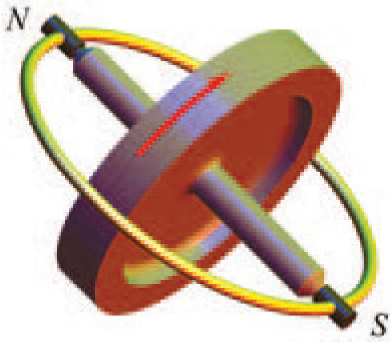

Figura 10: Giroscópio, apoiado ou suspenso.

REFERÊNCIAS

Nos seus *Principia Mathematica* (1687), obra considerada a mais influente na ciência de todos os tempos, Isaac Newton propõe uma axiomática do movimento dos corpos e a lei de atração universal, princípios que ele aplica à descrição e à explicação de caráter matemático dos movimentos planetários do sistema solar. Newton apresentou a precessão dos equinócios como resultado da ação gravítica do Sol e da Lua, mas foi Jean d'Alembert (1749) quem estabeleceu com rigor matemático o papel da atração luni-solar na precessão. Logo de seguida, em 1750, Leonhard Euler apresenta "um novo princípio da mecânica" (no essencial, o 'milagre matemático' acima referido), que viria a culminar na sua teoria geral do movimento dos corpos rígidos, em 1765. Refiram-se outros matemáticos cujas obras foram decisivas no estabelecimento da teoria da rotação dos corpos rígidos: Joseph-Louis Lagrange e a sua mecânica analítica, em 1788; Louis Poinsot e a sua mecânica geométrica, em 1834; Felix Klein e Arnold Sommerfeld publicaram o tratado definitivo do pião, em língua alemã, entre 1897 e 1910; a tradução inglesa, *The Theory of the Top*, começou a ser publicada em 2008, estando a publicação do quarto volume prevista para 2014.

SOBRE O AUTOR

Eduardo Marques de Sá é professor catedrático aposentado do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, membro correspondente da Academia das Ciências de Lisboa, membro do Centro de Matemática da UC, onde investiga no grupo de Álgebra e Combinatória, e membro da equipa do Projecto Delfos de que foi cofundador.