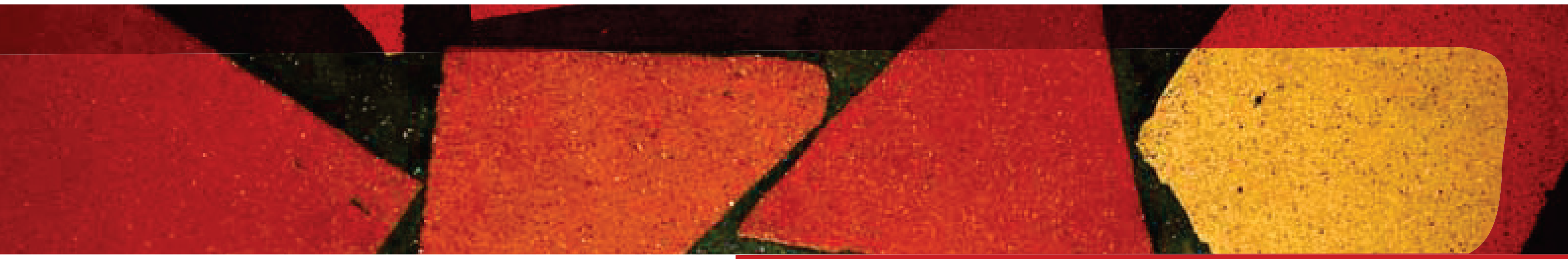


Manuel Silva
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

Pedro J. Freitas
Universidade de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

GRUPOS **FINITOS** SIMPLES

A classificação completa dos grupos simples finitos foi uma das grandes conquistas da matemática do século XX. Demorou cerca de 50 anos a fazer e envolveu mais de cem autores, compreendendo um total de mais de 15 mil páginas, ficando o resultado conhecido com "o teorema enorme".

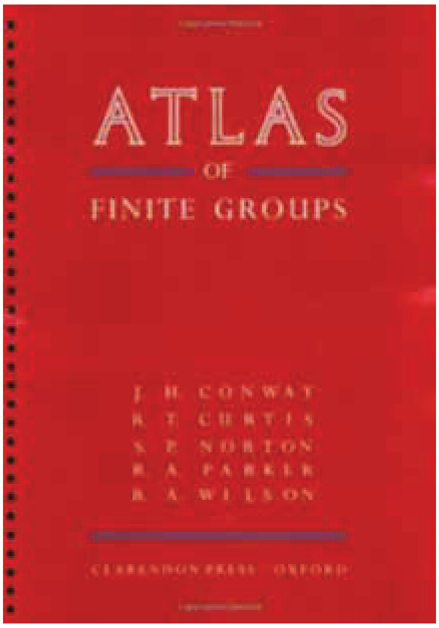
Num texto anterior falámos da recente descrição do grupo E_8 e de todo o esforço envolvido neste trabalho. Ora, o grupo E_8 tinha surgido como um elemento excecional na classificação dos grupos de Lie simples, feita à custa de certas estruturas combinatórias chamadas diagramas de Dynkin. Este tipo de teoria de classificação não começou, evidentemente, com os grupos de Lie. Um dos casos mais próximos e espetaculares deste tipo de resultado foi a classificação de todos os grupos simples finitos.

Um grupo é um conjunto com uma operação associativa, com elemento neutro, e para a qual todo o elemento tem inverso. Os exemplos mais significativos são os conjuntos de Transformações de um conjunto que deixam uma certa estrutura desse conjunto invariante. Por exemplo, as permutações do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, que deixam invariante a cardinalidade. Podemos também pensar numa figura geométrica simples, como um quadrado, e pensar quais são as isometrias do plano que deixam o quadrado invariante: há três rotações, quatro reflexões e a identidade (este grupo pode ser visualizado em *http://www.cs.umb.edu/~eb/d4/*). Em qualquer dos casos anteriores, a operação de grupo em causa é a composição.

Uma das ações mais importantes de um grupo G é a ação de conjugação sobre si mesmo: cada elemento g age sobre um elemento $x \in G$ da seguinte forma: $x \mapsto g^{-1}xg$. Os subgrupos de G (subconjuntos de G que também são grupos) que se mantêm invariantes para esta ação são chamados subgrupos normais. Chamamos classe de conjugação de um elemento x ao conjunto de elementos de G que são conjugados de x, isto é, que têm a forma $g^{-1}xg$. Os subgrupos invariantes podem ser então vistos como subgrupos que são a união de várias classes de conjugação.

Num grupo em que a operação é comutativa, todos os subgrupos são normais. No caso mais geral, há sempre dois subgrupos normais de G: todo o G e o grupo formado apenas pela identidade. Se não houver mais do que estes, o grupo diz-se simples.

Fixemo-nos agora nos grupos finitos. Dentro destes, os grupos simples desempenham um papel semelhante ao dos primos para os números inteiros (até as próprias definições são de certo modo semelhantes). Surgem, naturalmente, as seguintes perguntas: quais são os grupos finitos simples, e será que com eles conseguimos construir todos os grupos finitos? Curiosamente, a segunda pergunta é mais simples de responder, e a resposta é afirmativa: qualquer grupo finito pode ser visto como uma "torre" de grupos simples (o nome técnico da "torre" é série de composição). Há uma diferença importante em relação aos inteiros: com uma certa coleção de grupos simples é possível construir vários grupos finitos (dependendo



de como se "empilham"). A primeira pergunta é muito mais difícil de responder: a classificação completa demorou cerca de 50 anos a fazer – entre 1955 e 2008, sensivelmente, houve artigos publicados com contribuições explícitas para a classificação, embora houvesse trabalho nesta área desde o século XIX. Envolveu mais de 100 autores e compreende um total de mais de 15 mil páginas (por isso é que este resultado é conhecido como "o teorema enorme" – ver, por exemplo, o artigo "An enormous theorem: the classification of finite simple groups", de Richard Elwes, disponível na internet).

Os grupos simples foram classificados em três famílias infinitas, às quais se junta uma coleção de 26 grupos ditos esporádicos (a classificação é descrita com algum detalhe na *List of finite simple groups* da Wikipedia). Destes, houve um que se tornou particularmente famoso, o Monstro , que tem o seguinte número de elementos:

808, 017, 424, 794, 512, 875, 886, 459, 904, 961,
710, 757, 005, 754, 368, 000, 000, 000.

Infelizmente, e ao contrário do que aconteceu com os grupos de Lie, não há nenhuma estrutura combinatória que descreva os grupos simples, o que explica, em parte, a complexidade das demonstrações e da classificação final. No entanto, muitos destes grupos são grupos de permutações, ou grupos de transformações que deixam uma certa estrutura geométrica invariante, tal como nos exemplos anteriores.

Para além de se saber quais são os grupos simples, é importante saber um pouco mais sobre eles. Há certas funções, definidas num grupo e com valores complexos, que contêm informação importante sobre o grupo, chamadas carateres, que passamos a descrever informalmente. Como dissemos, é natural esperar que um grupo atue sobre certos conjuntos, e quando os elementos atuam como aplicações lineares de um espaço vetorial nele próprio, a ação leva o nome de representação. Uma representação faz assim corresponder a cada elemento do grupo uma aplicação linear, e o caráter é então a função que faz corresponder a cada elemento o traço dessa aplicação.

Mais uma vez, há elementos mais simples entre os carateres, a partir dos quais se podem obter todos os outros: são os carateres irredutíveis. É conhecido que, num grupo finito, há tantos carateres irredutíveis como classes de conjugação, sendo que cada caráter é constante em cada classe. Portanto, cada grupo finito tem uma tabela de carateres, que é uma matriz quadrada, com uma linha por cada caráter irredutível e uma coluna por cada classe de conjugação; na linha i e na coluna j aparece o valor do caráter i na classe j.

O livro *Atlas of Finite Groups*, publicado em 1985 e reeditado com correções em 2003 (reconhecível pela sua capa vermelha e pelo seu grande formato, 42 cm por 30 cm), tem uma lista de vários factos sobre 93 destes grupos simples finitos, nomeadamente tabelas de carateres, cujas matrizes chegam a ocupar páginas inteiras.

Este processo não se fez sem revezes. Em 1983, Gorenstein anunciou que o teorema de classificação estava completo (levando à publicação do *Atlas* dois anos depois), quando na verdade havia uma demonstração de um caso que não estava completamente correta, tendo havido correções de erros até 2008. Em 1955, Gorenstein, Lyons e Solomon começaram a tentar encontrar uma demonstração revista, na esperança de simplificar o trabalho monumental, projeto que está ainda em curso.

Quando pensamos no trabalho de provar um teorema matemático, podemos por vezes permanecer na imagem clássica, imaginando um matemático, no seu gabinete, estudando afincadamente e partilhando algumas conversas com os seus colegas, até ao momento em que tem uma intuição salvadora, que o leva à demonstração pretendida. A classificação de que falámos terá tido certamente momentos destes, mas, mais do que a sua soma, é um trabalho de colaboração monumental, envolvendo mesmo pessoas de várias gerações, trabalhando para um objetivo comum.