A Tautócrona, a Evoluta e o Relógio de Pêndulo de Huygens

Helena Mena Matos [a]; Teresa Carrapa [b]
Universidade do Porto [a]; Escola Secundária de Paredes [b]
mmmatos@fc.up.pt [a]; mtcarrapa@gmail.com [b]

O processo de aplicação da matemática nem sempre consiste em pegar numa sua teoria e aplicá-la num determinado domínio ou problema. O que acontece muitas vezes é não existir a matemática requerida e nesse caso nova matemática emerge como resultado da aplicação.

INTRODUÇÃO

O processo de aplicação da matemática nem sempre consiste em pegar numa sua teoria e aplicá-la num determinado domínio ou problema. O que acontece muitas vezes é não existir a matemática requerida e nesse caso nova matemática emerge como resultado da aplicação. Um exemplo disso é a criação, no século XVII, da teoria das evolutas de Huygens, que surge na sequência dos seus estudos sobre o pêndulo e aparece no tratado *Horologium Oscillatorium* (1673). O problema da determinação da longitude, associado à medição exata do tempo, fez com que Huygens se interessasse pela construção e pelo aperfeiçoamento dos relógios, levando-o à construção do relógio de pêndulo. O pêndulo circular, não sendo isócrono, conduziu-o ao problema da tautócrona, que consiste em encontrar a curva ao longo da qual um corpo sem velocidade inicial e apenas sujeito à força da gravidade chega ao ponto mais baixo sempre no mesmo intervalo de tempo, independentemente do seu ponto de partida. Huygens descobre e demonstra por processos geométricos que a cicloide invertida é tautócrona, mas fica com um novo problema. Como deve ser construído o pêndulo para que a sua massa descreva uma cicloide? A resposta seria dada resolvendo outra questão matemática: encontrar a curva cuja tangente em cada ponto é normal a uma dada cicloide, isto é, encontrar a evoluta da cicloide. Mais uma vez, por processos geométricos, Huygens consegue demonstrar que a evoluta da cicloide é outra cicloide, sendo-lhe finalmente possível idealizar um ajustamento mecânico para construir o pêndulo isócrono.

A partir da invenção do cálculo diferencial por Newton e Leibniz, este último discípulo de Huygens, os problemas de mecânica começam a ser resolvidos usando equações diferenciais. Em 1690, Jacob Bernoulli demonstrou novamente que a cicloide é tautócrona estabelecendo uma equação diferencial para essa curva e resolvendo-a.

Neste artigo, recorrendo à matemática dos nossos dias, apresentaremos a resolução analítica do problema da tautócrona e a determinação da evoluta da cicloide invertida, os dois resultados que permitiram a Huygens a construção do relógio de pêndulo isócrono.

RELÓGIO DE PÊNDULO DE HUYGENS

No século XVII tornou-se imperioso encontrar um método para medir a longitude que, sem referências terrestres, permitisse nas grandes viagens marítimas identificar a localização das embarcações. Este problema estava intimamente ligado ao da determinação precisa do tempo. Em teoria, como a 15º de longitude corresponde uma hora de diferença horária, se fosse possível manter a bordo um relógio acertado pela hora de um local de longitude conhecida, ao marcar nesse relógio o meio-dia local, a diferença entre as horas locais permitiria determinar a diferença das suas longitudes e consequentemente determinar a longitude do local. Contudo, na época, os melhores relógios atrasavam-se ou adiantavam-se vários minutos por dia, impossibilitando a manutenção do tempo de referência nos navios.

Galileu (1564-1642) foi o primeiro a conceber um relógio regulado por um pêndulo, esperando com a sua utilização obter a precisão na medição do tempo que faltava aos relógios da época. Do estudo que fez sobre o pêndulo simples acreditou que este seria isócrono, isto é, o tempo de uma oscilação completa seria independente da amplitude da mesma. Consequentemente, as variações de amplitude provocadas quer pela resistência do ar quer pelo impulso para manter o movimento pendular não alterariam o seu período, pelo que este poderia ser usado como uma medida constante do tempo. Embora tenha deixado o seu projeto por finalizar e não tenha construído nenhum relógio de pêndulo, deixou a ideia para a sua construção.

Retomando a ideia de Galileu, Huygens (1629-95) construiu o primeiro relógio de pêndulo em 1657, e desde então trabalhou na conceção e no desenvolvimento de relógios, tentando criar o relógio que pudesse ser utilizado como cronómetro marítimo. Em 1657, ciente de que o pêndulo simples ao oscilar descreve um arco de circunferência que não é isócrono, embora para pequenas amplitudes o seja aproximadamente, questionou-se se existiria uma curva ao longo da qual o movimento do pêndulo fosse independente da amplitude das oscilações. Huygens tentou encontrar essa curva empiricamente colocando o pêndulo entre duas placas metálicas que limitavam o seu balanço e que tinham como função acelerar o movimento à medida que o pêndulo se afastava da vertical. Quando o pêndulo oscilasse com amplitudes maiores, as placas produziriam um encurtamento do fio, correspondendo a esse encurtamento um aumento de velocidade, de tal modo que o tempo gasto a descrever esse arco de maior amplitude se tornasse igual ao tempo necessário para percorrer um arco de pequena amplitude sem qualquer restrição.

A construção do pêndulo isócrono envolveu assim a resolução de dois problemas:

1. Encontrar a curva tautócrona ao longo da qual a massa do pêndulo deve mover-se.
2. Encontrar um modo de suspender o pêndulo, garantindo que este se move ao longo da curva tautócrona.

Estes dois problemas serão resolvidos nas secções seguintes, usando as ferramentas atuais.

CURVATURA E EVOLUTA

Uma curva plana pode ser interpretada como o caminho traçado por um ponto a mover-se sobre um plano. Se $\alpha(t)$ representar o vetor posição desse ponto no instante t, a curva será descrita por uma aplicação $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$ e $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Trata-se do conceito de curva parametrizada e designa-se α por curva parametrizada e $\alpha(I)$ por traço da curva.

No caso de ambas as componentes de α possuírem derivadas de qualquer ordem, a curva diz-se suave. No que se segue, todas as curvas serão consideradas suaves.

O vetor velocidade da curva parametrizada α é $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ que, quando não nulo, define a direção da tangente à curva no instante t. Se o vetor velocidade de α nunca se anula, a curva diz-se regular e tem uma direção tangente bem definida em cada instante. Se a curva não é regular, os pontos onde $\alpha'(t) = \vec{0}$ chamam-se pontos singulares de α.

O comprimento de arco de uma curva parametrizada regular α a partir do ponto $\alpha(t_0)$ é a função

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(u)du,$$

onde $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ é a velocidade escalar da curva α no instante t.

Note-se que se $\|\alpha'(t)\| = 1$ para qualquer t, então $s(t) = t - t_0$, isto é, t mede o comprimento de arco a menos de uma constante.

Dizemos que uma curva está parametrizada pelo comprimento de arco quando é percorrida com velocidade escalar constante igual a 1.

Se α é uma curva definida no intervalo $[a, b]$, regular e não parametrizada pelo comprimento de arco, pode ser reparametrizada de tal modo que tenha velocidade escalar constante igual a 1. Com efeito, uma vez que $s'(t) = v(t) > 0$, a função s é estritamente crescente e, portanto, injetiva. Assim, s é uma bijeção de $[a, b]$ em $[s(a), s(b)]$. Chamando h à inversa de s, tem-se que $\alpha \circ h$ é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

Quando pensamos numa curva, é provável que a primeira imagem que nos ocorra seja a de uma trajetória com alteração contínua da direção. Quanto maior for a alteração da direção por unidade de distância percorrida, mais acentuada será a curva. Assim, a forma da curva está associada à rapidez de alteração da sua direção, aquilo a que chamamos curvatura. Com a curvatura pretende-se medir quanto "curva" uma curva.

Como medir a curvatura de uma curva? De acordo com a nossa intuição, a curvatura de uma reta deverá ser zero e a curvatura de uma circunferência deverá ser igual em todos os pontos e diminuir quando o raio aumenta. No caso de uma curva parametrizada qualquer, $t \to \alpha(t)$, suave e regular, a parametrização define um sentido de percurso ao longo do traço da curva correspondente ao crescimento do parâmetro t. A direção da curva num ponto P é a direção do vetor tangente à curva nesse ponto, que pode ser medida pelo ângulo orientado φ que esse vetor faz com o semieixo positivo Ox. Medir a rapidez com que a curva muda a direção equivale a medir a variação do ângulo φ de um ponto para outro comparada com a distância percorrida. Isto sugere que a curvatura em qualquer ponto de α seja medida pela taxa de variação de φ com respeito ao comprimento de arco. A curvatura assim definida pode ser positiva, negativa ou nula. O valor absoluto da curvatura mede o grau de encurvamento, diminuindo quando a curva se torna menos acentuada. O sinal indica a orientação da curva sendo a curvatura positiva ou negativa consoante a curva vire à esquerda ou à direita.

Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A parametrização define a orientação da curva no sentido em que s cresce. Seja $\vec{t}(s) = \alpha'(s)$ o vetor unitário tangente a α no ponto $\alpha(s)$. Para cada $s \in I$, define-se o vetor unitário normal $\vec{n}(s)$ que se obtém de $\vec{t}(s)$ por rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido positivo (anti-horário).

Assim se $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ então $\vec{t}(s) = (x'(s), y'(s))$ e $\vec{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$. Sendo $\varphi(s)$ o ângulo orientado que $\vec{t}(s)$ faz com o semieixo positivo Ox, a curvatura com sinal de α no ponto $\alpha(s)$ é a taxa de variação da direção do vetor tangente a esse ponto com respeito ao comprimento de arco, isto é

$$k(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds}.$$

Através de alguns cálculos simples conclui-se que $k(s) = \vec{t}'(s) \cdot \vec{n}(s)$ ou, alternativamente, $k(s) = x'y'' - x''y'$.

Se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ for uma curva regular não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco, $\vec{t} = \frac{1}{v}(x', y')$, $\vec{n} = \frac{1}{v}(-y', x')$ e facilmente se verifica que $\vec{t}' = kv\vec{n}$ e $\vec{n}' = -kv\vec{t}$. Neste caso define-se a curvatura de α como a curvatura de uma qualquer reparametrização de α pelo comprimento de arco, sendo a sua expressão dada por:

$$k = \frac{(x'', y'') \cdot (-y', x')}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Se $\alpha(t_0)$ é um ponto regular de uma curva parametrizada α, o centro de curvatura de α em $\alpha(t_0)$ é o ponto

$$\alpha_*(t_0) = \alpha(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}\vec{n}(t_0)$$

e a grandeza

$$\frac{1}{|k(t_0)|}$$

é o raio de curvatura de α em $\alpha(t_0)$.

O centro de curvatura situa-se na normal à curva no ponto $\alpha(t_0)$ a uma distância igual ao raio de curvatura e está à "esquerda" da curva (no sentido de $\vec{n}(t_0)$) se $k(t_0) > 0$ e à "direita" da curva (no sentido de $-\vec{n}(t_0)$) se $k(t_0) < 0$. Em qualquer caso o centro de curvatura situa-se no lado côncavo da curva.

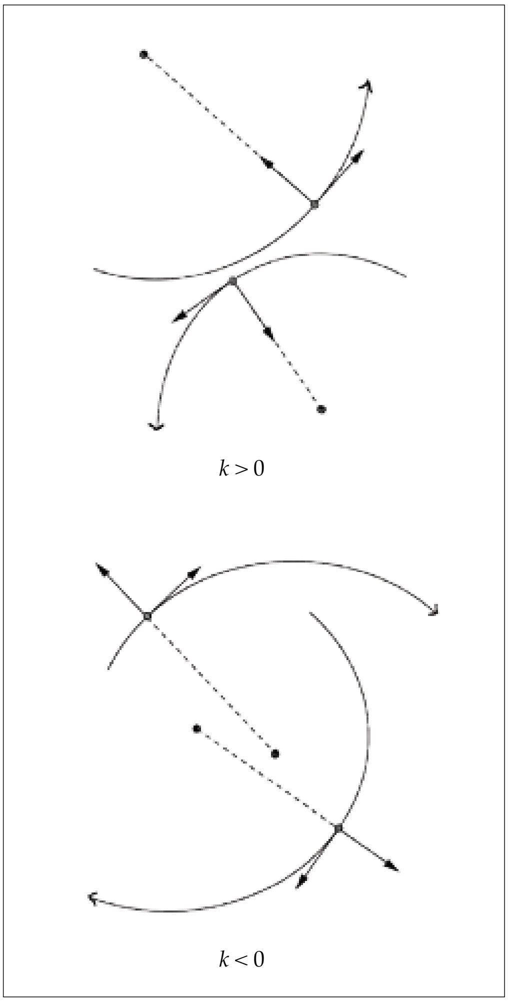

Figura 1: Centros de curvatura.

O lugar geométrico dos centros de curvatura de uma curva parametrizada regular α é uma nova curva α_* com o nome de evoluta de α. Assim,

$$\alpha_*(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\vec{n}(t). \qquad (t \in I).$$

Se α e α_* são regulares em $t = t_0$, então a tangente à evoluta em $\alpha_*(t_0)$ é a reta normal a α em $\alpha(t_0)$ e vice-versa. De facto, derivando $\alpha_*(t)$ em ordem a t, tem-se

$$\begin{aligned} \alpha'_* &= \alpha' + \left(\frac{1}{k}\right)'\vec{n} + \frac{1}{k}\vec{n}' \\ &= v\vec{t} - \frac{k'}{k^2}\vec{n} - \frac{1}{k}kv\vec{t} \\ &= -\frac{k'}{k^2}\vec{n}. \end{aligned}$$

O PROBLEMA DA TAUTÓCRONA

O problema da tautócrona consiste em determinar a curva plana ao longo da qual um corpo sem velocidade inicial e sujeito somente à força da gravidade desliza até ao ponto mais baixo da curva sempre no mesmo intervalo de tempo, independentemente do seu ponto de partida.

Considere-se um arame com a forma de uma curva suave que representa meia oscilação do pêndulo, e deixe-se uma conta partindo do repouso na posição (x_0, y_0) escorregar ao longo do arame até ao ponto mais baixo, que assumiremos como a origem $(0,0)$. Se a conta escorrega sem fricção, então, pelo princípio de conservação da energia mecânica, a energia cinética em qualquer instante será igual à variação da energia potencial,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\left(y_0 - y\right)$$

onde m representa a massa da conta, $v = -\frac{ds}{dt}$ e s o comprimento de arco entre a origem e o ponto (x, y).

Da equação anterior resulta

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g\left(y_0 - y\right)}$$

Considerando $s = f\left(y\right)$, o tempo de descida desde a altura y_0 até à origem é dado por

$$\begin{aligned} T\left(y_0\right) &= \int_{y_0}^{0} -\frac{\frac{ds}{dy}}{\sqrt{2g\left(y_0 - y\right)}}\, dy \\ &= \int_{0}^{y_0} \frac{f'\left(y\right)}{\sqrt{2g\left(y_0 - y\right)}}\, dy. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = y_0 z$, obtém-se

$$\begin{aligned} T\left(y_0\right) &= \int_{0}^{1} \frac{f'\left(y_0 z\right)}{\sqrt{2g\left(y_0 - y_0 z\right)}}\, y_0 dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{0}^{1} \frac{f'\left(y_0 z\right)}{\sqrt{\left(1-z\right)}\sqrt{y_0}}\, y_0 dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{0}^{1} \frac{f'\left(y_0 z\right)\sqrt{y_0}}{\sqrt{\left(1-z\right)}}\, dz. \end{aligned}$$

Para que t seja constante, deverá ter-se

$$\frac{\partial}{\partial y_0}\left(f'\left(y_0 z\right)\sqrt{y_0}\right) = 0,$$

o que conduz à equação diferencial

$$2f''\left(y\right)y + f'\left(y\right) = 0 \quad \text{para} \quad 0 < y < y_0.$$

Substituindo f' por g, obtemos uma equação diferencial de primeira ordem homogénea, que tem como solução geral

$$g\left(y\right) = ce^{-\frac{1}{2}ln(y)} = \frac{c}{\sqrt{y}}$$

onde c é uma constante positiva, pois g terá de ser positiva dado que f é uma função crescente.

Por outro lado, da igualdade

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

resulta

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1$$

donde

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\left(f'\left(y\right)\right)^2 - 1}$$

e integrando ambos os membros em ordem a y

$$x = \pm\int\sqrt{\left(\frac{c}{\sqrt{y}}\right)^2 - 1}\, dy = \pm\int\sqrt{\frac{c^2 - y}{y}}\, dy.$$

O integral pode ser resolvido através da substituição

$$y = c^2\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right) = c^2 \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi$, obtendo-se:

$$x = \pm\frac{c^2}{2}\left(\theta + \operatorname{sen}\theta\right) + k$$

onde k é a constante de integração.

Assim, a curva que procuramos é parametrizada por

$$\begin{aligned} x &= \frac{c^2}{2}\left(\theta + \operatorname{sen}\theta\right) + k \\ y &= \frac{c^2}{2}\left(1 - \cos\theta\right) \end{aligned}$$

para $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Para determinar k basta ter em conta que esta curva deve passar na origem. Para $y = 0$ resulta que $\cos\theta = 1$ logo $\theta = 0$. Portanto, para que se tenha $x = 0$ deve ter-se $k = 0$.

A constante c é determinada exigindo que a curva passe em $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, isto é resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{c^2}{2}\left(\theta_0 + \operatorname{sen}\theta_0\right) \\ y_0 &= \frac{c^2}{2}\left(1 - \cos\theta_0\right) \end{aligned}$$

em ordem a $c > 0$ e θ_0.

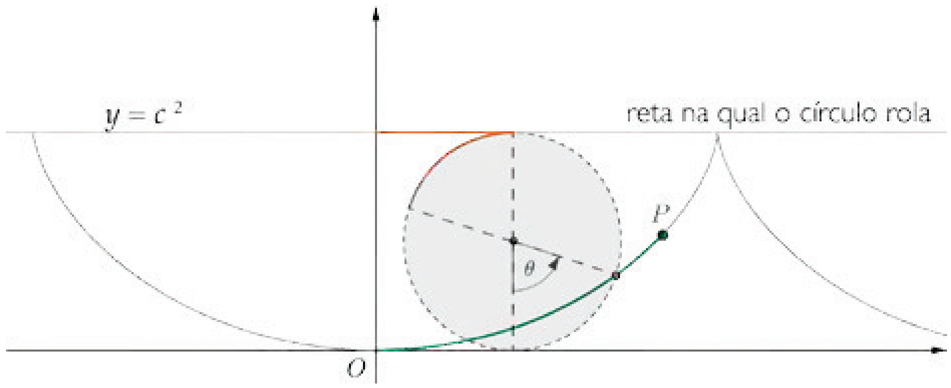

Figura 2: A curva que liga O a P é parte de uma cicloide invertida.

Este sistema pode ser resolvido em ordem a c e $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$, em função de x_0 e y_0 se e só se $0 < \left|\frac{y_0}{x_0}\right| \leq \frac{2}{\pi}$. Verifica-se facilmente que assim é, uma vez que a função h definida por

$$h(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{1 - \cos\theta}{\theta + \operatorname{sen}\theta}$$

com $\theta \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ é estritamente crescente, logo injetiva, e tem por contradomínio $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right] \setminus \{0\}$.

A curva encontrada é descrita pelas equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= \frac{c^2}{2}(\theta + \operatorname{sen}\theta) \\ y &= \frac{c^2}{2}(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

com $\theta \in [-\pi, \pi]$ e facilmente se verifica que é parte da cicloide invertida traçada por um ponto de uma circunferência de raio $\frac{c^2}{2}$ que rola sem deslizar por baixo e ao longo da reta $y = c^2$ (fig. 2).

Facilmente se verifica que o movimento de uma conta ao longo deste arco, partindo do repouso e sujeita apenas à força da gravidade, é um movimento harmónico simples em torno da origem com período

$$T = 4\pi c\sqrt{\frac{1}{2g}}$$

independente da amplitude.

O PROBLEMA DA SUSPENSÃO DO PÊNDULO

Como já foi dito, a ideia de Huygens era a de colocar o pêndulo entre duas placas metálicas que limitavam o seu balanço de modo a que o pêndulo descrevesse uma trajetória isócrona. Embora Huygens não soubesse a forma a dar a essas placas e a sua determinação tenha sido empírica, ele tinha uma justificação teórica. Na figura 3, a trajetória do pêndulo representada no manuscrito é constituída por arcos circulares *GK*, *EG* e *AE* cujos centros são *H*, *F* e *B* e cujos raios vão sendo cada vez menores. Estes pontos atuam como centros de rotação e em qualquer instante o fio é perpendicular ao arco que descreve. Cada ponto da placa metálica é visto como um centro de rotação instantâneo ou centro de curvatura, isto é, as placas constituem o lugar geométrico dos centros de curvatura da curva descrita pela massa do pêndulo, ou seja, a sua evoluta. Quando o fio oscila enrolando e desenrolando ao longo de uma placa, a parte livre do fio é mantida esticada, sendo normal à trajetória do pêndulo e tangente à superfície da placa no ponto de contacto. Huygens descobriu a propriedade que relaciona a curva descrita pelo pêndulo com a curva das placas metálicas. A normal à trajetória pendular deverá ser tangente à curva das placas. Em 1656, ele não conhecia nenhuma das curvas.

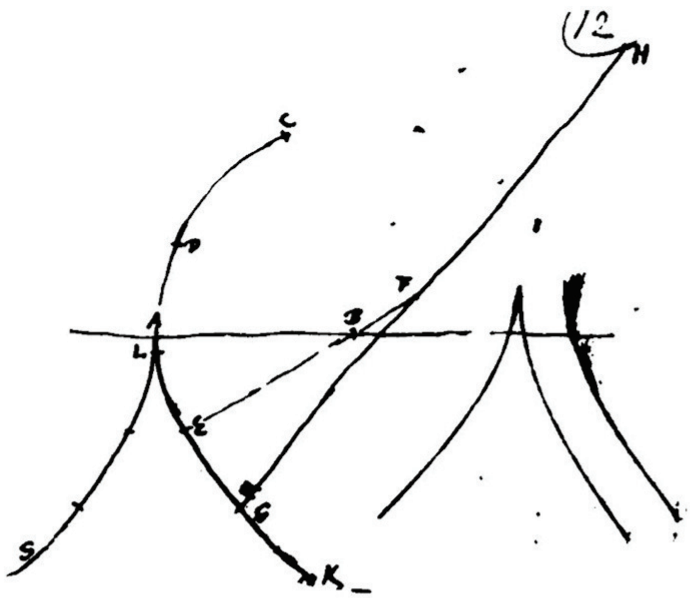

Figura 3: Manuscrito com as restrições do pêndulo de 1657 (imagem retirada de [5]).

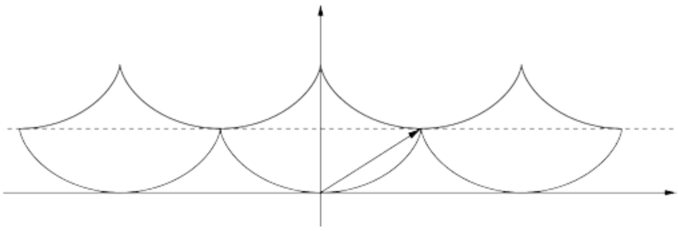

Figura 4: Cicloide invertida e a sua evoluta.

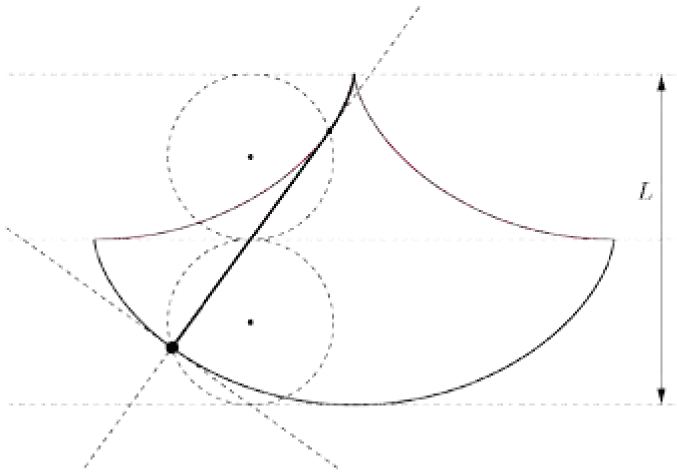

Figura 5: Pêndulo isócrono.

Em dezembro de 1659, Huygens demonstrou que a curva tautócrona era uma cicloide e a sua evoluta era outra cicloide. A forma das placas metálicas é assim descrita pela evoluta à cicloide invertida obtida na secção anterior.

Dada a cicloide invertida parametrizada por $\alpha(\theta) = (r\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta, r - r\cos\theta)$, temos

$$\alpha'(\theta) = (r + r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad \alpha''(\theta) = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta, r\cos\theta),$$

logo

$$k(\theta) = \frac{(r + r\cos\theta)(r\cos\theta) - (r\,\mathrm{sen}\,\theta)(-r\,\mathrm{sen}\,\theta)}{r^3\left((1+\cos\theta)^2 + \mathrm{sen}^2\,\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}} r\sqrt{1+\cos\theta}}$$

e

$$\begin{aligned}
\alpha_*(\theta) &= \alpha(\theta) + \frac{1}{k(\theta)\,\|\alpha'(\theta)\|}(-y'(\theta), x'(\theta)) \\
&= (r\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta, r - r\cos\theta) + 2(-r\,\mathrm{sen}\,\theta, r + r\cos\theta) \\
&= (r\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta, 3r + r\cos\theta) \\
&= (r(\theta - \pi) + r\,\mathrm{sen}(\theta - \pi) + r\pi, r - r\cos(\theta - \pi) + 2r) \\
&= \alpha(\theta - \pi) + (r\pi, 2r).
\end{aligned}$$

A última linha mostra que a evoluta de uma cicloide invertida é a mesma curva trasladada para outra posição (fig. 4).

Para construir o pêndulo isócrono (fig. 5), que teoricamente marca o tempo certo[1], basta determinar o comprimento do fio a partir da fórmula do período,

$$L = \frac{t^2 g}{4\pi^2},$$

moldar duas placas com a forma da cicloide gerada por uma circunferência de diâmetro $\frac{L}{2}$ e pendurar o pêndulo entre elas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Gibson, C. G., *Elementary Geometry of Differentiable Curves: an undergraduate introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[2] Pressley, A., *Elementary Differential Geometry*, Springer--Verlag, London, 2001.

[3] Rutter, John W., *Geometry of Curves*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.

[4] Teixeira, F. G., *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches*, Tome II, Éditions Jacques Gabay, 1995.

[5] Joella G., *Unrolling Time, Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[6] Zwikker, C., *The Advanced Geometry of Plane Curves and Their Applications*, Dover Publications,Inc., New York, 2005.

SOBRE AS AUTORAS

Helena Mena Matos é licenciada e doutorada em Matemática pela Universidade do Porto, sendo atualmente docente no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências dessa Universidade.

Teresa Carrapa é licenciada em Matemática – Ramo de Formação Educacional e mestre em Matemática para Professores pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Atualmente é docente na Escola Secundária de Paredes.

[1] Na prática a utilização das placas foi a origem de vários problemas que alteravam a precisão do relógio, pelo que a solução adotada foi manter o pêndulo com pequenas oscilações.