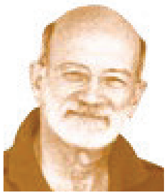

Eduardo Marques de Sá
Universidade
de Coimbra
emsa@mat.uc.pt

CUBOS E ESFERAS, PERSPETIVA E ANAMORFOSE

A perspetiva linear levanta problemas matemáticos interessantes, uns de resolução fácil e outros não, como em tudo na vida. Neste *Canto*, exploram-se os conceitos de *pirâmide visual* e *ponto de observação* e propõem-se problemas elementares inversos do da representação pictórica: perante um quadro executado em perspetiva rigorosa, de que local ou locais do recinto de exposição devemos contemplá-lo?

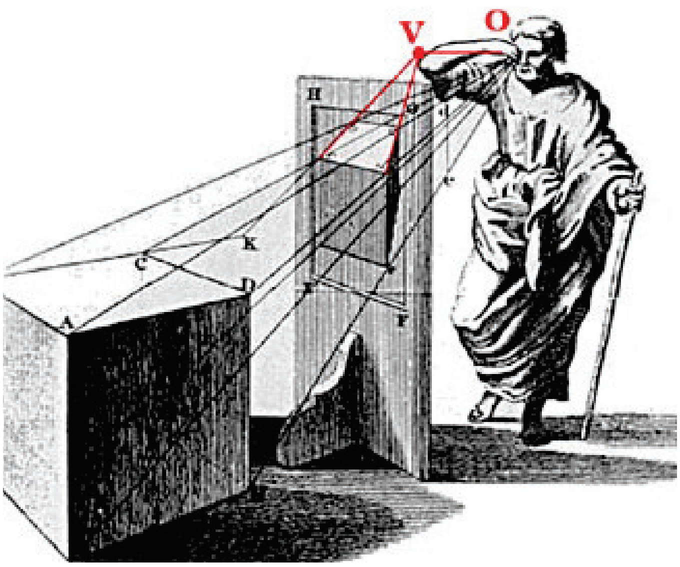

Figura 1: A pirâmide visual de Alberti.

PIRÂMIDE VISUAL

A perspetiva linear é, no essencial, uma teoria matemática desenvolvida por artistas do Renascimento, na sua busca de métodos de representação planar tão "fiéis" quanto possível dos objetos e paisagens que nos rodeiam. O documento fundador da teoria – o tratado *De Pictura* de Leon Alberti, de 1435 – indica como motivação básica do pintor o desenho duma secção plana da *pirâmide visual* determinada pelo objeto a representar e que tem como vértice o olho[1] do artista. A figura 1 (do livro *New Principles of Linear Perspective*, de Brook Taylor, 1811) mostra um paralelepípedo, a respetiva pirâmide visual (com vértice **O**, o olho do artista) e a sua secção pelo plano da tela montada num cavalete; mostra também um ponto notável, **V**, chamado *centro do quadro*, que é a projeção ortogonal do olho sobre o plano da tela. *O centro do quadro é o ponto de intersecção* (dito *de fuga*) *das retas do plano do quadro que representam retas do real tridimensional ortogonais ao plano de projeção.* Os artistas do Renascimento recuperaram da geometria euclidiana clássica teoremas como este para utilização prática imediata na execução dos seus quadros.

A pirâmide visual é um conjunto de semirretas emergentes de **O**, cada uma delas dirigida a um ponto visível do objeto observado e dotada de cor adequada ao ponto a que se dirige; uma versão abstrata do feixe de luz que podemos ver sair dum projetor de diapositivos.

PONTO DE OBSERVAÇÃO

Quando contemplamos um quadro, o nosso olho e os pontos coloridos do quadro geram uma pirâmide de contemplação; se o quadro estiver concebido de acordo com os princípios da perspetiva linear, o nosso ponto de observação deve ser tal que as duas pirâmides – a visual utilizada pelo artista e a nossa de contemplação do quadro – sejam "iguais". Mas os quadros duma exposição não costumam trazer instruções sobre o modo de observar.[2] Em tais casos, quem contempla e entende do assunto pode colocar o seu ponto de observação em local adequado baseado em mensagens matemáticas subtilmente escondidas na obra observada. O pintor constrói o quadro intersetando a pirâmide visual; o observador procura reconstruir a pirâmide a partir dessa interseção. Eis um exemplo matemático deste problema inverso. A figura 2 inclui dois quadrados concêntricos, o mais pequeno com $1/9$ da área do maior; ela pode representar uma infinidade de poliedros em perspetiva linear, pirâmides quadrangulares truncadas, por exemplo. Mas o título diz tratar-se dum cubo, talvez com uma face transparente, revelando-se o interior em perspetiva através desta face. Não é difícil aceitar que a figura representa um prisma quadrangular; no entanto, à distância normal de leitura o suposto prisma aparenta demasiada profundidade para ser cubo. Aproximando o olho do centro da figura, a coisa melhora bastante para quem não sofre de vista cansada.

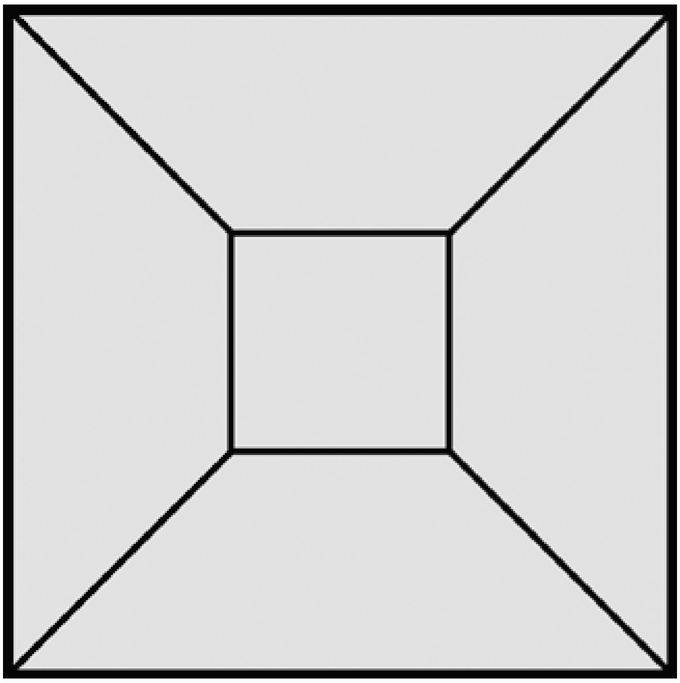

Figura 2: Interior dum cubo.

Problema 1. *Qual é o ponto de observação no qual o leitor deve colocar o seu olho para "ver o cubo como o artista o viu"?*

Existe um único ponto nessas condições acima da folha de papel, mas a unicidade dependeu de informação adicional não contida na forma abstrata mas dada pelo título da obra.

ESFERAS, CONES E PLANOS

Uma das ilustrações mais antigas da pirâmide visual é de Leonardo da Vinci, figura 3, uma miniatura rudimentar que ele esboçou à margem dum projeto de bomba de água.[3] Trata-se do espetrógrafo de Leonardo, com o qual o artista desenha, numa janela de vidro, a projeção plana duma esfera armilar; o centro de projeção é fisicamente marcado por um pequeno orifício numa tábua, firmemente imobilizada, através do qual o artista espreita a esfera.[4] No caso duma esfera, esquecidos os anéis, o pirâmide visual é um cone de revolução, pelo que a representação pictórica é uma cónica, mais precisamente, uma *elipse* por se supor que a esfera e o centro de projeção estão em lados opostos do plano da janela.

A tríade envolvida – esfera, cone e plano – traz à memória os famosos teoremas belgas das cónicas, resultados belíssimos que Germinal Dandelin publicou em 1822, que podem ver-se como uma alternativa elegante e sintética à teoria clássica das cónicas. Apolónio de Perga não desdenharia ter descoberto a manobra seguinte de que se dá apenas o essencial. Secciona-se uma superfície cónica de revolução por um plano que não contenha o vértice. Aqui, e na figura 4, apenas consideramos o caso que

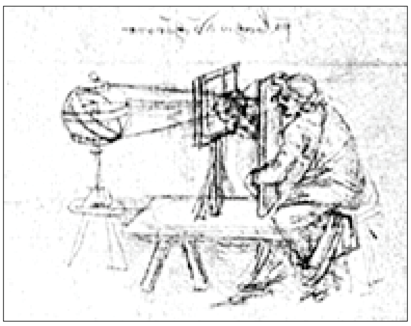

Figura 3: Janela de Leonardo.

mais nos interessa, o da elipse. Dentre as esferas inscritas no cone, existem duas, ditas *esferas de Dandelin*, que são tangentes ao plano dado em pontos de tangência denotados por F e G. Cada esfera de Dandelin é tangente à superfície cónica ao longo duma circunferência (a branco) de plano perpendicular ao eixo do cone. Um ponto P arbitrário da cónica determina pontos A e B nas circunferências brancas de contacto, com A, B e P sobre uma geratriz do cone. A distância $\overline{AB}$ não depende de P; por outro lado, tem-se $\overline{PF} = \overline{PA}$ e $\overline{PG} = \overline{PB}$ por motivos que facilmente se entendem. Portanto, $\overline{PF} + \overline{PG}$ é uma constante d independente de P.

A teoria da elipse pode refazer-se assim: por definição, os pontos de tangência F e G chamam-se *focos*, $f = \overline{FG}$ é a *distância focal* e f/d é a *excentricidade* da elipse. O argumento acima mostra que esta pode construir-se "à jardineiro".

A figura 5 mostra duas imagens duma bola-oito; a primeira tem contorno circular e a segunda foi obtida da primeira por simples alteração (linear) de escala ao longo da direção paralela ao bordo inferior desta folha de papel. O contorno da segunda imagem é, pois, uma elipse. Esqueça, por agora, os pormenores (oitos, sombras e reflexos), olhando apenas para as imagens como discos, um circular e o outro elítico.

Problema 2. *Existem pontos do espaço acima da folha de papel dos quais o seu olho vê o segundo disco como disco circular. Qual é o lugar geométrico desses pontos?*

Problema 3. *Tome agora em conta os conteúdos das imagens bidimensionais, nomeadamente: oitos, sombras e reflexos. Existe algum ponto do espaço do qual se consegue observar a segunda imagem e ver uma imagem matematicamente semelhante à primeira imagem da bola-oito?*

Se o conteúdo do disco circular fosse monocromático, a resposta a esta questão seria positiva (problema 2). Mas, para os conteúdos da figura 5, a resposta é negativa; isto pede alguma reflexão sobre o que significa ver duas imagens como semelhantes e um argumento matemático que mostre serem em geral diferentes as duas transformações praticadas, leve e brevemente descritas por: contrair linearmente uma imagem e olhá-la obliquamente. Isto sugere outro problema aparentemente mais complicado:

Problema 4. *Para que conteúdos é positiva a resposta ao problema 3?*

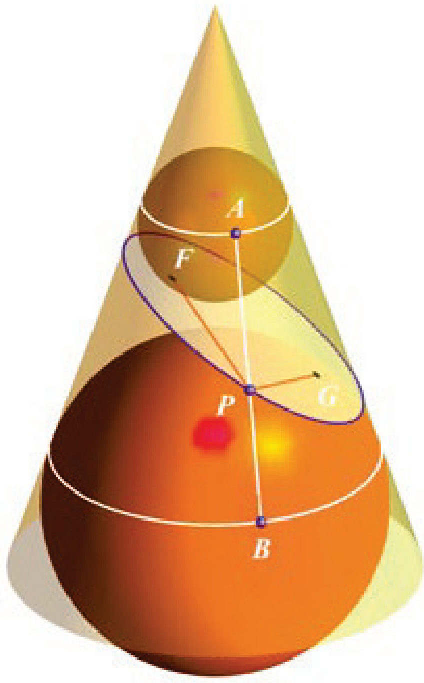

Figura 4: Esferas de Dandelin.


Figura 5: Bola-oito, circular e "esticada".

[1] Seria mais preciso falarmos do centro ótico dum olho.

[2] Claro que há exceções. O mural *Anamorfose Oblíqua* do Atractor/Matemática Viva no Pavilhão do Conhecimento, inclui "modo de usar" que pode ver-se na página *www2.pavconhecimento.pt/exposicoes/modulos* (visitada em 9 de agosto 2014).

[3] Em *Codex Atlanticus*, uma coleção de esboços e escritos executados entre 1478 e 1519.

[4] Os pormenores de execução são discutidos por Leonardo na obra póstuma *Trattato della pittura* publicada em 1651.

ANAMORFOSE E ARTE DE RUA

Termina este *Canto* com dois exemplos de anamorfoses. O primeiro é o famoso quadro *The Ambassadors*, de Hans Holbein, de 1533. É um dos quadros renascentistas mais discutidos, não tanto pelo rigor da perspetiva como pelo conteúdo das prateleiras – com referências matemáticas em quantidade considerável – e pela formação estranha que atravessa diagonalmente a parte central inferior do quadro. Em visão rasante vê-se uma caveira humana, cuja posição e cujo significado têm sido longamente tratados; o artista teve razões que não revelou, boas notícias para a especulação e fantasia, em particular por cultores das ciências ocultas dada a presença conspícua do símbolo da morte. A caveira não é objeto esférico, mas tem rotundidade suficiente para que possa enquadrar-se na discussão sobre as anamorfoses da esfera.

O segundo exemplo é duma pintura de rua de Julian Beever, um artista plástico que utiliza os princípios da perspetiva de modo rigoroso para dar relevo a figuras planas. O seu trabalho *Make poverty history* não é dos mais espetaculares, mas mostra uma utilização inesperada duma elipse muito excêntrica para dar a ilusão duma esfera que emerge do chão. Mostram-se aqui duas fotos: uma tirada com a câmara colocada no ponto de observação correto, a outra fotografada dum ponto 'errado'.

De acordo com informação de Julian Beever na sua página *web www.julianbeever.net*, o eixo maior da elipse da última foto é 13m. Admitamos que o ponto de observação ótima está colocado a uma altura de 1.5m, na vertical dum ponto do solo que dista 2m do referido eixo maior.

Problema 5. *Qual o comprimento do eixo menor da elipse?*

Navegando pelas páginas
www.julianbeever.net,
www.youtube.com/watch?v=hfn8Dz_13Ms,
www.youtube.com/watch?v=eKakTPiLpxI
(visitadas em 10 de agosto 2014) o leitor poderá encontrar coisas interessantes e divertidas relacionadas com a matéria aqui tratada.