Coelhos e Lotarias

António Pereira Rosa
Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho
antoniopereirarosa@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

Num conhecido livro de preparação para o exame nacional de Matemática A do 12.º ano de escolaridade ([14], página 179, exercício 44), surge o seguinte problema, a que vamos chamar "Problema dos coelhos":

"Numa coelheira há 20 coelhos sendo 5 brancos e 15 pretos. Abre-se a porta da coelheira e deixa-se sair os coelhos ***um a um****. Qual a probabilidade de que saiam, pelo menos, 2 coelhos brancos seguidos?"*

O livro em causa apresenta apenas a resposta a este problema (232/323), sem dar qualquer indicação sobre o processo seguido para a obter [1]. Se tentarmos resolver este problema pelos métodos usuais no 12.º ano (cálculo da probabilidade do acontecimento contrário e aplicação da Regra de Laplace), verificamos rapidamente que a parte difícil é a determinação do número de sequências de 20 coelhos, 5 brancos e 15 pretos, que **não** têm dois coelhos brancos seguidos.

Este tipo de problema de contagem surge com alguma frequência na literatura; veja-se, por exemplo [10] ou [1], em que se pergunta qual o número de sequências binárias[2], de comprimento n, com m zeros, em que nunca figuram dois zeros consecutivos, ou ainda [12], página 72.

Seguidamente, vamos apresentar soluções para este problema e mostraremos também que ele está diretamente relacionado com um conhecido problema de lotarias, a saber, qual a probabilidade de, num concurso do género do Totoloto com bolas numeradas de 1 a n, saírem dois números consecutivos quando se faz uma extração de m bolas. Esta abordagem, sugerida em [2] e desenvolvida em [7] e [17], parece-nos mais interessante e instrutiva do que a simples resolução do problema dos coelhos por meio dos processos que indicamos na próxima secção.

Um problema de cálculo combinatório e probabilidades no 12.º ano leva-nos às lotarias, aos números de Fibonacci e, claro, ao triângulo de Pascal.

2. RESOLUÇÕES DIRETAS DO PROBLEMA DOS COELHOS

Apresentamos em seguida uma solução elementar para o problema dos coelhos, que encontrámos em [9]. Pensando em termos de sequências de coelhos brancos (B) e pretos (P), vamos calcular a probabilidade do acontecimento contrário, isto é, a probabilidade de nunca surgirem dois B seguidos. Para que não surjam dois B consecutivos, tem de haver, pelo menos, um P a separá-los, como acontece, por exemplo, na sequência seguinte

$$\ldots \text{BPBPPBPBP}\ldots$$

Mais precisamente, a seguir a cada um dos quatro primeiros coelhos B terá de sair, obrigatoriamente, um coelho P, pelo que os coelhos brancos apenas podem ocupar 16 posições (uma motivação para este facto é dada mais à frente na prova do Teorema 1). Por isso, estes coelhos podem ser dispostos de ${}^{16}A_5$ maneiras distintas. Além disso, como os coelhos pretos podem permutar entre si de 15! maneiras, concluímos que o número de casos favoráveis a "não saírem dois coelhos brancos consecutivos" é ${}^{16}A_5 \times 15!$. Dado que os 20 coelhos podem permutar entre si de 20! maneiras distintas, a probabilidade de **não** saírem dois coelhos brancos seguidos é de ${}^{16}A_5 \times 15!/20! = 91/323$ e a resposta ao problema inicial é $1 - 91/323 = 232/323$.

Observe-se que se dividirmos ambos os termos da fração ${}^{16}A_5 \times 15!/20!$ por $15! \times 5!$, a probabilidade pode ser escrita na forma ${}^{16}C_5/{}^{20}C_5$, que sugere uma fórmula geral para este tipo de questões. O mesmo sucede com o problema de con-

[1] No mesmo livro (página 178) surge um outro problema semelhante a este, referente à disposição de livros numa prateleira de uma estante, apresentando-se de novo apenas a solução 11/13.

[2] Sequências de zeros e uns.

tagem referido na secção 1: se houver m zeros numa sequência binária de comprimento n, a consideração da expressão ${}^{n-m+1}C_m/{}^nC_m$, bem como o facto bem conhecido de haver ${}^nC_m$ sucessões binárias deste tipo, sugere que há exatamente ${}^{n-m+1}C_m$ sequências sem zeros consecutivos. Vamos agora provar a correção dessa expressão.

Teorema 1: *Há ${}^{n-m+1}C_m$ sucessões binárias de comprimento n, compreendendo m zeros (e, logo, $n-m$ uns) sem zeros consecutivos.*

Demonstração: Comecemos por escrever os $n-m$ símbolos "1": 1 1 1 1 …1. Depois coloquemos os m símbolos "0" nos espaços entre os símbolos "1", incluindo o espaço antes do primeiro "1" e o espaço depois do último. Há $n-m+1$ espaços e vamos escolher m deles para colocar os símbolos "0", o que pode ser feito exatamente de ${}^{n-m+1}C_m$ maneiras, concluindo-se assim a demonstração.

□

Está assim resolvido o problema dos coelhos: a probabilidade de não saírem dois coelhos brancos seguidos é

$$^{20-5+1}C_5/^{20}C_5 = ^{16}C_5/^{20}C_5.$$

Problemas deste género foram abordados pela primeira vez por Abraham de Moivre[3], no século XVIII (veja-se [16]); no século XIX, o matemático inglês William Allen Whitworth[4] mostrou que a sua solução pode ser obtida directamente por meio do cálculo dos coeficientes de certos polinómios; o leitor interessado pode consultar [18], página201, proposição LII.

3. O PROBLEMA DA LOTARIA

Consideremos uma lotaria em que, de uma urna contendo n bolas, numeradas de 1 a n, se extraem, sem reposição, m bolas (por exemplo, no nosso Totoloto, $n=49$ e $m=6$). Pretende-se saber qual a probabilidade de não saírem números consecutivos (ou, mais geralmente, a probabilidade de a diferença mínima entre quaisquer dois números saídos ser igual a $k>0$; a não existência de números consecutivos corresponde a $k=2$). Há muitas maneiras de resolver este problema (a referência [7] apresenta quatro processos distintos). Escolhemos a segunda das soluções de [7], que é particularmente interessante. Tal como sucede com o problema dos coelhos, a parte difícil é a determinação do número de casos favoráveis ao acontecimento "não saírem números consecutivos"; o número de casos possíveis é simplesmente ${}^nC_m$.

Pensando no Totoloto português, é imediato que o número de chaves possíveis é ${}^{49}C_6 = 13983816$; resta saber qual o número de casos favoráveis ao acontecimento "sair chave sem números consecutivos". Consideremos uma chave ordenada com essa propriedade, por exemplo,

7, 9, 13, 25, 44, 49

e tiremos respetivamente 0, 1, 2, 3, 4 e 5 a cada um dos seus termos. Obtemos a nova sequência,

7, 8, 11, 22, 40 e 44.

Os seus termos estão certamente entre 1 e 44, já que subtraímos números entre 0 e 5 a números entre 1 e 49; por outro lado, como na primeira sequência não há números consecutivos, na segunda os termos são todos distintos. Se repararmos que o processo é reversível, isto é, que dada uma sequência de seis números naturais entre 1 e 44 e lhe somarmos da maneira descrita os números 0, 1, 2, 3, 4 e 5, obtemos certamente uma sequência de seis números naturais não consecutivos e entre 1 e 49, concluímos que existe uma bijecção entre o conjunto A das sequências (ordenadas) de seis números naturais entre 1 e 44 e o conjunto B das sequências (ordenadas) de seis números naturais não consecutivos entre 1 e 49. Assim, $Card(A) = Card(B)$ e como obviamente $Card(A) = ^{44}C_6$, vem que $Card(B) = ^{44}C_6$ e a probabilidade é de ${}^{44}C_6/{}^{49}C_6 \approx 0,5048$.

Um pouco mais formalmente, vamos provar o seguinte teorema:

Teorema 2: *Sejam $n \geq 1$ e $m \geq 0$ dois números inteiros. Sejam*

$F_m^n = \{X \subseteq \{1,2,...n\} : Card(X) = m$, *e não há em X números consecutivos*$\}$

$G_m^n = \{X \subseteq \{1,2,...n+1-m\} : Card(X) = m\}$.

Então estes dois conjuntos têm o mesmo número de elementos.

Demonstração: Basta construir uma bijecção entre os dois conjuntos.

Seja $\{a_1,\ldots,a_m\} \in F_m^n$; podemos desde já supor que $a_i < a_{i+1}$ para cada $i \in \{1,\ldots,m-1\}$. Pondo $b_k = a_k + 1 - k$, vem que $1 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_n \leq n+1-m$. Com efeito, é óbvio que $b_1 \geq 1$ e

$$\mathrm{b}_m = a_m - m + 1 \leq n - m + 1 = n + 1 - m;$$

quanto ao resto, como $a_{i+1} - a_i \geq 2$, vem que

$$b_{i+1} - b_i = a_{i+1} - a_i - 1 \geq 1 \text{ e}$$

portanto, $b_{i+1} > b_i$.

Podemos então estabelecer a bijecção pretendida associando a cada $\{a_1, \ldots, a_m\} \in F_m^n$ (supondo os elementos de A escritos por ordem crescente) o conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$, com $b_k = a_k + 1 - k$; do que foi dito anteriormente resulta que $B \in G_m^n$. Resta-nos provar a injetividade e a sobrejetividade. Quanto à injetividade, se dois subconjuntos de F_m^n, digamos $\{a_1, \ldots, a_m\}$ e $\{a_1^*, \ldots, a_m^*\}$, tivessem a mesma imagem, viria que $a_k + 1 - k = a_k^* + 1 - k$ para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$ e, portanto, $a_k = a_k^*$ para todo o $k \in \{1, \ldots, m\}$. Para verificar a sobrejetividade, dado $B = \{b_1, \ldots, b_m\} \in G_m^n$, basta considerar os elementos $a_1, \ldots, a_m$ definidos por $a_k = b_k + k - 1$ para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$ para se concluir que

$$B = \{b_1, \ldots, b_m\} \in G_m^n$$

é a imagem de $\{a_1, \ldots, a_m\} \in F_m^n$ por meio da aplicação considerada.

$\square$

Corolário: *Card* $(F_m^n) = {}^{n-m+1}C_m$.

Demonstração: decorre imediatamente do teorema e do facto de G_m^n ter precisamente ${}^{n-m+1}C_m$ elementos.

$\square$

Reparemos agora que uma sequência binária $\mathcal{B}$ pode representar uma sequência de números naturais $\mathcal{N}$ se convencionamos que:

a) Um "1" na n-ésima posição de $\mathcal{B}$ significa que o número n faz parte da sequência $\mathcal{N}$.

b) Um "0" na n-ésima posição de $\mathcal{B}$ significa que o número n **não** faz parte da sequência $\mathcal{N}$.

Por exemplo, à sequência de números naturais 1 3 4 7 corresponde a sequência binária 1 0 1 1 0 0 1 e vice-versa. Com esta correspondência, verifica-se que a uma sequência binária de comprimento n contendo exatamente k símbolos "1", não consecutivos, está associada uma sequência de k elementos de $\{1, 2, \cdots, n\}$ sem números consecutivos.

Assim, a solução obtida para o problema da lotaria leva-nos a uma solução (algo indireta) do problema de contagem subjacente ao problema dos coelhos, o que possibilita a solução quase imediata deste último.

O Teorema anterior fornece a base para um curioso jogo de azar: supondo, para fixar ideias, que $n = 49$ e $m = 6$, podemos apostar na saída de dois números consecutivos quando retiramos ao acaso seis bolas duma urna com 49 bolas numeradas de 1 a 49. Se consideramos as probabilidades anteriormente calculadas, verificamos que o jogo é favorável à banca, mas por muito pouco; se a aposta for de 1 euro, a esperança de lucro da banca é 0,0096 $(= 1 \times 0,5048 - 1 \times (1 - 0,5048))$, ligeiramente inferior a um cêntimo por cada euro apostado.

Apresentamos em seguida uma generalização do Teorema 2.

Teorema 3: *O número de maneiras distintas $f_k(m, n)$ de escolher m números em $\{1, 2, \ldots, n\}$ tais que a menor das distâncias entre dois quaisquer deles é igual a $k > 0$ é dado por*

$$f_k(m, n) = {}^{n-(k-1)(m-1)}C_m, \text{ com } n > m > 1,\ k \geq 1$$

(o Teorema 1 é precisamente o caso $k = 2$).

Demonstração: Não vamos apresentá-la; o leitor interessado pode consultar [5] ou [7], onde surgem várias demonstrações, que são, de um modo geral, semelhantes às do Teorema 2, embora algo mais "pesadas".

$\square$

Corolário: *Numa lotaria em que as bolas têm os números 1, 2, …, n, e a chave tem m números, a probabilidade de que, pelo menos, dois dos números da chave tenham distância inferior a k é de*

$$p_k(m, n) = 1 - \frac{{}^{n-(k-1)(m-1)}C_m}{{}^{n}C_m}.$$

Demonstração: É imediata, a partir do Teorema 3.

$\square$

No resto desta secção, vamos proceder a uma análise mais fina das chaves da lotaria, numa direção diferente do Teorema 3, usando ideias que encontrámos em [11]. Comecemos por uma definição:

Definição 1: Consideremos r números distintos,

$$a_1, a_2, \ldots, a_r \in X_n = \{1, 2, \ldots, n\},$$

ordenados por ordem crescente. Um *grupo* da sequência $a_1, a_2, \ldots, a_r$ é:

(i) um conjunto singular formado por um desses números, quando a distância a qualquer dos outros da sequência for superior a 1.

ou

[3] Abraham de Moivre (1667-1754), matemático inglês de origem francesa.

[4] William Allen Whitworth (1840-1905), matemático e sacerdote anglicano.

(ii) um subconjunto de dois ou mais destes números, consecutivos, quando a distância de cada um dos números do subconjunto a qualquer dos outros da sequência (que não do subconjunto) for superior a 1.

Por exemplo, na sequência 2, 4, 5, 7, 21, 22, 23, temos os grupos com um elemento {2} e {7}, o grupo com dois elementos {4, 5} e o grupo com três elementos {21, 22, 23}.

Se chamarmos g ao número de grupos na sequência, d ao número de diferentes tipos de grupos (números isolados, pares de números consecutivos, ternos de números consecutivos, etc.) e $g_i (i = 1, 2, \ldots, d)$ ao número de grupos de tipo i, é óbvio que $g_1 + g_2 + \ldots + g_d = g$.

No exemplo anterior, $g = 4$, $d = 3$ e

$$g_1 + g_2 = 2 + 1 + 1 = 4 = g.$$

O resultado que pretendemos provar é o seguinte:

Teorema 4: Seja $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ e consideremos as sequências de r números distintos $a_1, a_2, \ldots, a_r$ extraídas de X_n. Destas sequências, o número N das que têm g grupos, de d tipos diferentes, com $g_i (i = 1, 2, \ldots, d)$ grupos de tipo i, é dado por

$$N = \frac{g!}{g_1! \times g_2! \times \ldots \times g_d!} \times^{n-r+1} C_g.$$

Demonstração: É semelhante à do Teorema 2. O número de hipóteses para a escolha de uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_r$ extraída de X_n e com g grupos é ${}^{n-r+1}C_g$, se ignorarmos as permutações dos grupos, pelo raciocínio feito na prova do referido Teorema; por outro lado, para cada configuração com g grupos de d tipos, existem $\frac{g!}{g_1! \times g_2! \times \ldots \times g_d!}$ possibilidades, pela fórmula das permutações com repetições. Combinando os dois resultados, vem que $N = \frac{g!}{g_1! \times g_2! \times \ldots \times g_d!} \times^{n-r+1} C_g$, como queríamos.

□

Por exemplo, se $X_n = \{1, 2, \ldots, 30\}$ e considerarmos chaves com sete elementos, com dois grupos com um elemento, um grupo com dois elementos e um grupo com três elementos, verificamos que existe um total de $\frac{3!}{2! \times 1! \times 1!} \times^{30-7+1} C_3 = 6072$ chaves; uma delas é 2, 4, 5, 7, 21, 22, 23, que vimos anteriormente.

Deixamos ao cuidado do leitor a verificação da tabela 1, que ilustra a situação para o Totoloto nacional (n = 49 e r = 6).

Repare-se que a soma dos números da última coluna é $13983816 =^{49} C_6$, o número de chaves existentes no Totoloto português.

Tipo de Chave	Núm. de tipos de grupos (d)	Núm. de cada tipo de grupo (g_i)	Núm. total de grupos (g)	N
Seis números isolados	1	$g_1 = 6$	6	7059052
Quatro números isolados e dois consecutivos	2	$g_1 = 4$, $g_2 = 1$	5	5430040
Três números isolados e três consecutivos	2	$g_=3$, $g_2 = 1$	4	543004
Dois números isolados e quatro consecutivos	2	$g_1 = 1$, $g_2 = 1$	3	39732
Um número isolado e cinco consecutivos	2	$g_1 = 1$, $g_2 = 1$	2	1892
Seis números consecutivos	1	$g_1 = 1$	1	44
Dois números isolados e dois pares de números consecutivos	2	$g_1 = 2$, $g_2 = 2$	4	814506
Três pares de dois números consecutivos	1	$g_1 = 3$,	3	13244
Um número isolado + um par + um terno de números consecutivos	3	$g_1 = 1, g_2 = 1$ $g_3 = 1$	3	79464
Quatro números consecutivos + um par de números consecutivos	2	$g_1 = 1$, $g_2 = 1$	2	1892
Dois pares de três números consecutivos	1	$g_1 = 2$	2	946

Tabela 1

4. RESOLUÇÕES DIRETAS DO PROBLEMA DE CONTAGEM DOS NATURAIS NÃO CONSECUTIVOS

O problema de contagem "Determinar o número de maneiras de selecionar m objetos de entre n objetos numerados de 1 a n e dispostos numa fila, sem que surjam objetos com números consecutivos", é muito antigo e pode ser resolvido de várias maneiras[5]. Dentre as várias soluções conhecidas, escolhemos uma que é, em nossa opinião, particularmente interessante.

Em 1943, Irving Kaplansky[6], apresentou uma resolução elementar do famoso *Problème des Ménages* de Édouard Lucas (veja-se [4], [8], [12] ou [15]) baseada em dois lemas, que são conhecidos neste contexto como primeiro e segundo lemas de Kaplansky. O primeiro lema de Kaplansky é precisamente uma resolução do problema de contagem que temos vindo a estudar.

Teorema 5 (primeiro lema de Kaplansky): *O número $f(n,m)$ de maneiras de escolher m objetos dentre n objetos alinhados, sem que haja dois consecutivos, é dado por $f(n,m) = {}^{n-m+1}C_m$.*

Demonstração: É óbvio que $f(n,1) = n = {}^{n-1+1}C_1$ e que $f(n,n) = 0 = {}^{n-n+1}C_n$, se $n > 1$.

Seja então m tal que $1 < m < n$. Podemos considerar dois tipos de seleções nas condições do enunciado, aquelas a que o primeiro objeto pertence e aquelas a que este não pertence.

Quanto às primeiras, é óbvio que não podem conter o segundo objeto e são em número de $f(n-2, m-1)$; quanto às segundas, são em número de $f(n-1, m)$. Disto decorre que o número $f(n,m)$ verifica a relação

$$f(n,m) = f(n-2, m-1) + f(n-1, m). \qquad (1)$$

Podemos então provar a relação $f(n,m) = {}^{n-m+1}C_m$ por indução. Como $n > m > 1$, comecemos por notar que

$$f(3,2) = 1 = {}^{3-2+1}C_2.$$

Por hipótese de indução,

$$f(n-1, m) = {}^{n-m}C_m \text{ e } f(n-2, m-1) = {}^{n-m}C_{m-.1};$$

substituindo em (1), vem que

$$f(n,m) = {}^{n-m}C_m + {}^{n-m}C_{m-1} = {}^{n-m+1}C_m,$$

(por uma conhecida propriedade das combinações), como queríamos.

□

A título de curiosidade, enunciamos o segundo lema de Kaplansky, cuja demonstração pode ser vista em [15]:

Teorema 6 (segundo lema de Kaplansky): *O número $g(n,m)$ de maneiras de escolher m objetos dentre n objetos dispostos sobre uma circunferência, sem que haja dois consecutivos, é dado por $g(n,m) = \frac{n}{n-m}\,{}^{n-m}C_m$, para $n > m$.*

5. UMA RELAÇÃO COM OS NÚMEROS DE FIBONACCI

O problema das lotarias permite obter uma curiosa relação entre os coeficientes binomiais e os números de Fibonacci (não é de espantar que estes surjam em problemas relacionados com coelhos…). Na figura abaixo, está representado o triângulo de Pascal, bem como as suas "diagonais secundárias".

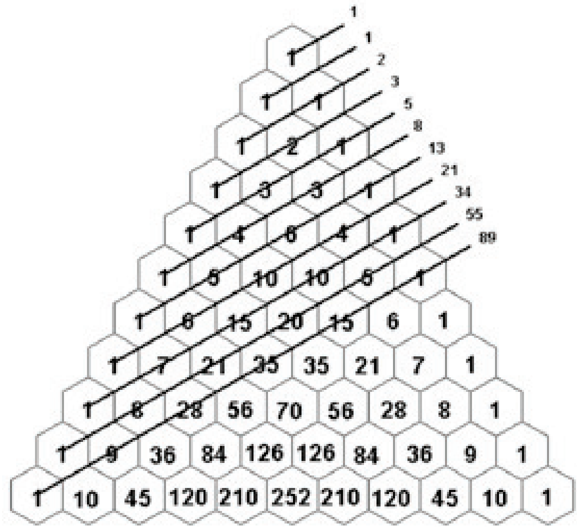

Figura 1

Teorema 7: *O número total de maneiras de selecionar números dentre os n primeiros números naturais sem que se obtenha números consecutivos (incluindo a seleção vazia), é igual a f_{n+2}, o (n + 2) – ésimo número de Fibonacci.*

Demonstração: A prova é muito semelhante à do Teorema 5. Seja a_n o número a determinar. Quando escolhemos uns tantos elementos de $\{1, 2. \ldots, n\}$ sem que haja números consecutivos, há duas hipóteses mutuamente exclusivas:

1) O número n está entre os escolhidos.

ou

2) O número n **não** está entre os escolhidos.

[5] Veja-se, por exemplo, [13]. O autor da solução aí apresentada, Thomas Muir (1884 -1934), foi um especialista em determinantes; uma outra solução, recorrendo a uma equação diofantina, aparece em [3], página 37.

[6] Irving Kaplansky (1917-2006), matemático canadiano.

No caso 2), estamos em presença de uma das a_{n-1} seleções sem números consecutivos que se pode fazer em $\{1, 2, \ldots, n-1\}$; no caso 1), $n-1$ não faz certamente parte da seleção e os restantes elementos desta constituem certamente uma das a_{n-2} possíveis maneiras de escolher um certo número de elementos de $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ sem números consecutivos. Repare-se que pode dar-se o caso de não haver elementos restantes, no caso de a seleção no caso 1) se reduzir a n. Disto resulta que o número de seleções contendo n é precisamente a_{n-2} e, portanto, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Como estamos a incluir a seleção vazia, vem que $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$ e a sucessão (a_n) é 2, 3, 5, 8, 13,…, sendo assim $a_n = f_{n+2}$, o $(n+2)$ – ésimo número de Fibonacci.

□

Vejamos uma aplicação ao estudo do triângulo de Pascal. Considere-se $n = 4$ e enumeremos as seleções de elementos de {1, 2, 3, 4} sem elementos consecutivos.

1) Seleção vazia.
2) Seleções com um elemento – são 4, a saber "1", "2", "3" e "4".
3) Seleções com dois elementos – são 3 , a saber "1, 3", "1, 4" e "2, 4".

Há um total de 1 + 4 + 3 = 8 , que é precisamente o 6.º número de Fibonacci.

□

Relacionemos estes resultados com a fórmula do corolário do Teorema 2:

1) Neste caso, n=4, m=0 e ${}^{n-m+1}C_m = {}^5C_0 = 1$
2) Neste caso, n=4, m=1 e ${}^{n-m+1}C_m = {}^4C_1 = 4$
3) Neste caso, n=4, m=2 e ${}^{n-m+1}C_m = {}^3C_2 = 3$

e a igualdade acima pode ser escrita como

$$ {}^5C_0 + {}^4C_1 + {}^3C_2 = f_6, $$

ou seja, a soma dos elementos da 6.ª diagonal secundária é precisamente igual ao 6.º número de Fibonacci.

O caso geral pode ser tratado da mesma maneira, chegando-se à conclusão de que a soma da n–ésima diagonal secundária do triângulo de Pascal é igual ao n–ésimo número de Fibonacci. Este resultado pode ser interpretado apenas como uma igualdade envolvendo os números $f(n, m)$ do primeiro lema de Kaplansky, mas parece-nos mais interessante e apelativa a versão envolvendo o triângulo. Para concluir, referimos que se pode fazer um estudo semelhante para os números $g(n, m)$ do segundo lema de Kaplansky, obtendo-se em vez dos números de Fibonacci os *números de Lucas*[7]; o leitor interessado pode consultar [6] para a prova desta afirmação.

Agradecimento: O autor agradece ao *referee* a leitura atenta do texto; as correções e sugestões que apresentou muito contribuíram para melhorar a qualidade do artigo.

5. REFERÊNCIAS

[1] André, C. e Ferreira, F. (2000), *Matemática Finita*, Universidade Aberta, Lisboa.

[2] APM (2008) – Questão respondida sobre o "problema dos coelhos", recurso "Pergunta Agora", Associação dos Professores de Matemática.

[3] Balakrishnan , V. K. (1995), *Theory and Problems of Combinatorics*, McGraw-Hill, Inc., New York.

[4] Chen, C-H. e Koh, K-M (1992), *Principles and Techniques in Combinatorics*, World Scientific, Singapura.

[5] Drakakis, K. (2007) *Facta Universitatis: Mathematics and Informatics*, Volume 22, Issue 1, 2007, pp. 1-10.

[6] Honsberger, R. (1985), *Mathematical Gems III (Dolciani Mathematical Expositions, No. 9)*, The Mathematical Association of America.

[7] Howard, F. T. (1996), "The Probability of Consecutive Numbers in Lotto, Applied Probability Trust", disponível em *http://ms.appliedprobability.org/data/files/Articles2028/28-2-4.pdf.*

[8] Kaplansky, I. (1943), "Solution of the "Problème des Ménages"", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49, 784-885.

[9] Linhares, A. (s/d), "Coelhos em Fuga", site Matemática.com (*http://matematica.com.sapo.pt*), secção "Probabilidades (12º)".

[10] Mattson Jr., H. F. (1978), *Discrete Mathematics with applications*, John Wiley and Sons, New York.

[11] McPherson, I. e Hodson, D. (2009), "Lottery Combinatorics, Mathematical Spectrum" 41(3), 110-115, Applied Proba-

bility Trust, disponível em *http://ms.appliedprobability.org/data/files/selected%20articles/41-3-4.pdf.*

[12] Morgado, A. C., O., Carvalho, J. B. P., Carvalho, P. C. P., Fernandez (1991), *Análise Combinatória e Probabilidade*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.

[13] Muir, T. (1902), "Note on Selected Combinations", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, Vol. XXIV, 102-104, Neil and Company, Limited, Edinburgh.

[14] Neves, M.A. F. e Guerreiro, L. (2007), *Acesso ao Ensino Superior – Matemática A*, Porto Editora, Porto.

[15] Ryser, H. B. (1965), *Combinatorial Mathematics (The Carus Mathematical Monographs No. 14), 2nd impression*, The Mathematical Association of America, distribuído por John Wiley and Sons.

[16] Todhunter, I. (1865), *A History of the Mathematical Theory of Probability*, MacMillan and Co., Cambridge.

[17] Watson, R. (1996), "Lotteral Thinking", 70, *Teaching Statistics*, vol. 18, nº. 3, Nottingham, Grã-Bretanha.

[18] Whitworth, W. A. (1901), *Choice and Chance (5th edition)*, Deighton Bell and Co., Cambridge.

Consultámos ainda os sites BibM@th.net (*www.bibmath.net*) e MacTutor History of Mathematics (*www-history.mcs.st-and.ac.uk*), este último para as biografias dos vários matemáticos referidos neste trabalho.

SOBRE O AUTOR

António Pereira Rosa é licenciado em Matemática (1986) e mestre em Matemática para o Ensino (2008) pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É professor do quadro da Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho desde 1994.

[7] Os números de Lucas são os termos da sucessão 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, …, definida por $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2} (n > 2)$. Estes números gozam de muitas propriedades semelhantes às dos números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …., já que a relação de recorrência que os define é igual; apenas a segunda condição inicial é diferente.