ÓSCAR FELGUEIRAS
Universidade
do Porto
olfelgue@fc.up.pt

QUATRO QUATROS

Como escrever um número com quatro quatros?

Se um certo número pode ser escrito com quatro quatros, porque não também escrever o número que o sucede dessa forma? E no caso de não se conseguir mesmo, será que se pode usar alguma notação diferente que o permita? Vejamos alguns exemplos, convidando o leitor a encontrar soluções para os sucessores dos números apresentados (respostas no rodapé[1]):

$$\begin{array}{rclrclrcl} 0 & = & 44-44 & 2 & = & \frac{4}{4}+\frac{4}{4} & 4 & = & 4\times(\frac{4}{4})^4 \\ 6 & = & 4+4+\sqrt{4}-4 & 8 & = & 4+4+4-4 & 10 & = & \frac{44-4}{4} \\ 20 & = & 4\times(4+\frac{4}{4}) & 24 & = & 4!+(4-4)\times 4 & 44 & = & 44.4-.4 \end{array}$$

O problema dos quatro quatros teve a sua primeira aparição impressa conhecida em 30 de dezembro de 1881, na revista semanal *Knowledge, An Illustrated Magazine of Science*. Ele surge incluído numa carta enviada ao editor, Richard Proctor, assinada sob o nome de Cupidus Scientiae, eventualmente um pseudónimo do próprio editor. Ao longo dos anos este problema foi revisitado por vários autores que lhe deram popularidade e mais recentemente por entusiastas que se dedicaram a criar programas para o resolver.

Na formulação original de 1881, apenas eram consideradas as operações aritméticas mais usuais de soma, subtração, multiplicação, divisão e raiz quadrada. Com tais regras é possível encontrar expressões para todos os números até 20, com exceção do 19. Foi notado logo na altura que, com uma pequena flexibilização das regras, poder-se-ia resolver o caso do 19: usando o símbolo de fatorial, $19 = 4! - 4 - 4/4$, ou usando o ponto decimal, $19 = (4 + 4 - .4)/.4$.

Esta questão de encontrar um número a partir de outros não era propriamente novidade. O reverendo inglês Thomas Dilworth tinha incluído no seu manual de aritmética, *The Schoolmaster's Assistant* de 1743, dois exercícios de tipo semelhante. Neles eram pedidas representações para o 12 a partir de quatro algarismos iguais e para o 34 utilizando quatro vezes o 3. Esse manual teve várias edições em Inglaterra e nos Estados Unidos a partir de 1769, tendo-se tornado um livro de matemática muito seguido na época.

Em 1911 o matemático inglês Rouse Ball incluiu pela primeira vez o problema dos quatro quatros na 5.ª edição do seu livro *Mathematical Recreations and Essays*. Nele propunha a utilização de fatoriais, subfatoriais e pontos decimais. A operação subfatorial consiste em associar a cada número inteiro não negativo n o número de permutações de n sem elementos fixos, também chamadas de desarranjos de n, denotando-se por $!n$[2]. Esta operação é conveniente pois permite obter o 9 com um só quatro (9=!4). Quanto ao ponto decimal, ele era entendido como sendo usado na forma simples de dízima finita, $.4 = 2/5$, ou na forma de dízima infinita, $.\dot{4} = 4/9$; em particular, possibilitando uma nova solução para 19, $\frac{4+4+.\dot{4}}{.\dot{4}}$. Em 1914, na 6.ª edição do seu livro, Rouse Ball tinha já feito um estudo bastante extensivo do problema dos quatro quatros, referindo que era possível exprimir todos os números até 877. Sem usar subfatoriais conseguia fazê-lo até 112, tal como mencionava num seu artigo de 1912[3]. De salientar que, apesar de aceitar o número 2 expresso com apenas um quatro ($2 = \sqrt{4}$), era excluída explicitamente a expressão de números como .2 ou 22 com um ou dois quatros, respetivamente.

Posteriormente houve vários livros de divulgação matemática que deram visibilidade a este quebra-cabeças. Entre aqueles com mais impacto destacam-se três:

- *O Homem que Calculava*, 1938, de Malba Tahan, heterónimo do brasileiro Júlio César de Mello e Souza, no qual são apresentadas expressões para os números de 0 a 10. É também mencionado que se pode escrever todos os números até 100. Para o fazer, o único detalhe dado sobre as operações permitidas é o emprego de sinais matemáticos modernos;
- *From Zero to Infinity*, 1955, da autora americana Constance Reid, que, depois de apresentar soluções de 1 até 12, escreve que se não limitarmos o uso de notações, podemos representar *todos* os números com quatro quatros;
- *The Magic Numbers of Dr. Matrix*, 1964, do americano Martin Gardner, faz uma pequena resenha histórica do problema e exibe uma solução para o 113, sem usar subfatoriais mas violando a restrição imposta por Rouse Ball:

$$113 = \frac{4!}{.\dot{\sqrt{4}}} + \frac{\sqrt{4}}{.4}.$$

Hoje em dia existem várias páginas da Internet que se dedicam a apresentar soluções para o problema dos quatro quatros seguindo múltiplas convenções. Uma das mais informativas é a de Paul Bourke[4] que, entre outras coisas, mostra como resolver o problema dos quatro quatros supondo a não restrição de operadores. A função logarítmica, em particular, permite representar qualquer número inteiro positivo, pois considerando uma expressão com $2n$ raízes quadradas, obtém-se

$$n = -\ln(\ln(\underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{\text{2n raízes}})/\ln(4))/\ln(4).$$

Por esta razão a função logarítmica não é geralmente utilizada. O uso de funções trigonométricas também não é habitual. Uma das possíveis razões pode ser o facto de que compondo alternadamente as funções secante e arco tangente, é possível escrever todos os números inteiros maiores do que 4 a partir da expressão,

$$n = \underbrace{\sec(\text{arctg}(\cdots\sec(\text{arctg}}_{n^2-16 \text{ vezes } \sec(\text{arctg})}(4))\cdots)).$$

Além de apresentar a explicação detalhada desta fórmula, Paul Bourke defende o recurso ou não a determinadas notações. Nos casos em que o admite encontram-se, por exemplo:

- Raízes de índice real que permitem escrever
$$32 = \sqrt[.4]{4}, \quad 657 = 4!(4! + \sqrt[-\sqrt{.\dot{4}}]{.\dot{4}});$$
- O símbolo de percentagem, %, que é na prática entendido como a divisão por 100 do número a que se aplica e que possibilita resoluções dos números difíceis 113 e 878:
$$113 = \frac{\sqrt{4}/.\dot{4} + \sqrt{4}\%}{4\%}, \quad 878 = \frac{4}{.\dot{4}\%} - 4! + \sqrt{4}.$$

Nas notações não admitidas encontram-se os subfatoriais e a função gama.

Já David Wheeler[5] faz um uso muito extensivo da função gama, denotada Γ, que satisfaz a conveniente identidade $\Gamma(n) = (n-1)!$ para qualquer inteiro positivo n. Na lista de soluções que exibe, classifica-as segundo o seu nível de impureza, considerando que usar o símbolo % é pior do que usar a função Γ. O primeiro número em que ocorre Γ é precisamente o 113,

$$113 = \Gamma(\Gamma(4)) - \frac{4!+4}{4}.$$

O primeiro sem o recurso à aritmética mais básica, obrigando o uso de uma dízima infinita, é o 73,

$$73 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{4!}}}} + 4/.\dot{4}.$$

Quanto ao 878, aparece na forma,

$$878 = 4/.4\% - \sqrt{4} - \Gamma(\Gamma(4)).$$

Esta lista tem o número 2179 como primeiro ausente, sendo muito completa por permitir operações algo discutíveis, tais como a função quadrado $sq(x) = x^2$ e operadores lógicos aplicados às representações binárias dos números.

Para uma lista seguindo as regras de Rouse Ball nada melhor do que a página de Nicolas Hammond[6]. O número 878 continua a ser o primeiro não listado. Além disso, o autor da página reclama possuir uma lista (não exibida) até 13 116, fazendo uso da função termial (ou n-ésimo número triangular) $\Sigma(n) = 1 + 2 + \ldots + n$, por vezes também denotada por $n?$. A página portuguesa da Wikipédia[7] apresenta soluções até 103 usando a função termial por diversas vezes, a qual facilita bastante a resolução do problema.

Em conclusão, o problema dos quatro quatros é um quebra-cabeças que, apesar de ter uma longa tradição, continua a suscitar interesse devido a ser estimulante e à diversidade de abordagens que origina. Fica o desafio para o leitor de fazer a sua própria lista com as operações do seu agrado.

---

[1] Possíveis respostas: $1 = 44/44$, $3 = (4+4+4)/4$, $5 = 4 + (4/4)^4$, $7 = 44/4 - 4$, $9 = 4 + 4 + 4/4$, $11 = 44/(\sqrt{4}+\sqrt{4})$, $21 = (44 - \sqrt{4})/\sqrt{4}$, $25 = 4! + \sqrt{4} - 4/4$, $45 = 44 + 4/4$.

[2] Subfatorial de n satisfaz a igualdade $!n = n!(1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + \ldots \pm 1/n!)$.

[3] *Mathematical Gazette*, maio, 1912

[4] http://paulbourke.net/fun/4444/

[5] http://www.dwheeler.com/fourfours/

[6] http://home.comcast.net/~nicolas.hammond/fun/four_fours.html

[7] http://pt.wikipedia.org/wiki/Quatro_quatros