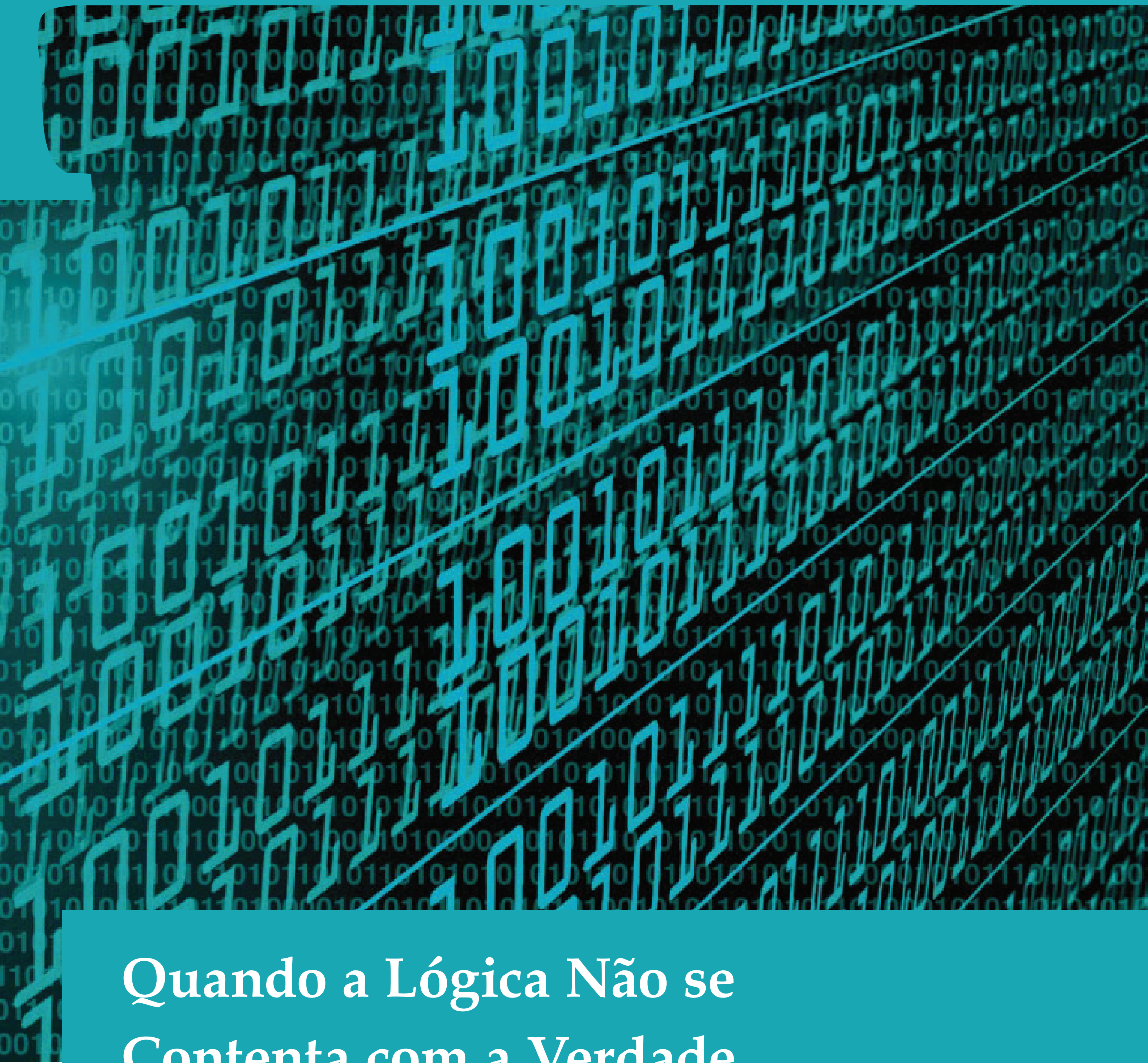

Quando a Lógica Não se Contenta com a Verdade

Gilda Ferreira

Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias e CMAF - Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais

gmferreira@fc.ul.pt

Ainda que muitas vezes sem nos apercebermos, a lógica está presente não apenas na prática matemática mas nos mais variados aspetos da nossa vida quotidiana. Noções de lógica são usadas para encadearmos o nosso raciocínio, chegarmos a conclusões válidas e tomarmos decisões fundamentadas. Quando se fala em lógica, quase garantidamente o leitor pensará em lógica clássica, a lógica mais amplamente utilizada e estudada, assente no conceito de verdade. Haverá outras? A resposta é afirmativa e será ilustrada com dois exemplos que mostram que a introdução de novas lógicas não é um mero (estéril) exercício intelectual, mas um caminho com um vasto leque de aplicações práticas.

1. INTRODUÇÃO

O termo "lógica" vem da palavra grega *logos* que significa "razão" e, enquanto disciplina, pode ser definida como a ciência do pensamento e do raciocínio válido/racional. O seu estudo estava já presente em várias civilizações antigas remontando, no ocidente, a Aristóteles (384 ac-322 ac). Só em meados do século XIX, a lógica matemática – que explora as aplicações da lógica formal à matemática – se estabelece como um ramo próprio da matemática. Nomes como George Boole, Augustus De Morgan, Charles Peirce, Gottlob Frege, Giuseppe Peano e, um pouco mais tarde, Bertrand Russell e David Hilbert participam neste processo. Em menos de dois séculos, a lógica matemática tornou-se uma disciplina madura, multifacetada e com contributos importantes em outras áreas para além da matemática entre as quais destacamos a ciência da computação. A presença de lógicos matemáticos em departamentos de filosofia, matemática e ciência da computação por todo o mundo mostra bem o carácter transversal e interdisciplinar da sua área de atuação. Atualmente a lógica matemática encontra-se *grosso modo* ramificada em quatro áreas: teoria de conjuntos, teoria da recursão, teoria de modelos e teoria da demonstração. O imbricamento dos vários ramos é extenso sendo, por exemplo, a lógica clássica de primeira ordem uma ferramenta transversal.

A lógica clássica, a forma mais disseminada de pensamento matemático, baseado no paradigma da *verdade*, será justamente o tema da Secção 2 do presente artigo.

Existem, contudo, outras formas de raciocínio. Durante o século XX alguns matemáticos mudaram a sua atenção da *verdade* para a *justificação/demonstração*: a *lógica intuicionista*, que, em vez da propagação da verdade, propaga demonstrações *construtivas*, acabava de nascer. Na Secção 3, apresentaremos esta lógica e algumas das suas aplicações.

A lógica intuicionista não é, porém, o único caminho que conduz ao *construtivismo*. Este pode ser conseguido, por exemplo, através de uma dinâmica de consumos. A *lógica linear*, protagonista na Secção 4, em vez de propagar as noções de verdade ou demonstrabilidade, foca-se nos *recursos* e em como manter registo dos *consumos* ao longo de uma demonstração. Encerramos (Secção 5) com breves considerações sobre a existência de outras lógicas não-clássicas, para além das tratadas neste artigo.

2. LÓGICA CLÁSSICA

A matemática usual, que o leitor está habituado a ler e a usar, assenta na lógica clássica. A lógica clássica baseia-se na noção de verdade. Uma asserção declarativa, bem-formada e não ambígua terá de ser necessariamente verdadeira ou falsa (não podendo ser verdadeira e falsa em simultâneo – princípio da não-contradição). Isto independentemente do que quer que se afirme ou mesmo da existência ou não de alguma verificação ou prova. De forma sucinta, a lógica clássica[1] caracteriza-se por aceitar a lei do terceiro excluído (em latim *tertium non datur*): $A \vee \neg A$ (lê-se "A ou não A"), independentemente do significado de A. Por exemplo, a veracidade de

[1] Para uma formalização detalhada da lógica clássica (proposicional e de predicados) incluindo sistemas formais de derivação, sugerimos a leitura de [3] (capítulos 1 e 2), a leitura de [12] (secções 3, 9, 12 e 13) e a consulta de [11].

"No dia 25 de abril de 1974 choveu em Lisboa ou não choveu em Lisboa" é um dado adquirido. Ainda que não saibamos o estado do tempo nesse dia na capital, ou bem que choveu ou bem que não choveu.

A noção que a lógica clássica pretende captar (e propagar) é a de verdade. Dado que se A é verdadeiro, então $\neg A$ é falso, e se A é falso então $\neg A$ é verdadeiro,

A	$\neg A$
V	F
F	V

concluímos que $A \vee \neg A$ terá necessariamente de ter o valor lógico verdadeiro. Note que, para que uma disjunção seja verdadeira, basta que uma das asserções que a compõem o seja:

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Abaixo encontram-se as tabelas de verdade para outros conectivos lógicos, nomeadamente $\wedge$ (conjunção) e $\rightarrow$ (implicação). Relembramos que $A \wedge B$ se lê "A e B" e que $A \rightarrow B$ se lê "se A, então B".

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

De modo equivalente[2], a lógica clássica pode ser caracterizada por permitir a eliminação da dupla negação $\neg\neg A \rightarrow A$ ou a técnica de demonstração por contradição (para provar A, basta partir de $\neg A$ e chegar a uma contradição).

Vamos ilustrar um tipo de argumentação válido em lógica clássica que o leitor já encontrou certamente em várias demonstrações matemáticas. Concretamente, iremos demonstrar que "existem números irracionais a e b tais que a^b seja racional".

Teorema 1 $\exists a, b \in \mathbb{R}$, *irracional (a)* $\wedge$ *irracional(b)* $\wedge$ *racional*(a^b).

Demonstração. Consideremos o número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Se for racional, temos o pretendido, basta tomar a e b como sendo ambos o número irracional $\sqrt{2}$. Caso contrário, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ será irracional. Mas então

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

que é certamente um número racional. Bastando neste caso tomar $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$.

□

A demonstração anterior tem por base o princípio do terceiro excluído: "$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é um número racional ou $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ não é um número racional".

Repare, contudo, que, mesmo depois de ver a demonstração, se alguém lhe pedir números irracionais a e b tais que a^b seja racional, não terá nenhum exemplo seguro para fornecer, pois não sabe qual dos casos se dá, i.e., não sabe se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional ou irracional.

A demonstração acima não é construtiva. Prova-se a existência de dois irracionais nas condições do enunciado sem os apresentar concretamente.

Note a diferença para a demonstração que se segue, esta sim, construtiva.

Demonstração. Considere os números irracionais $a := \sqrt{2}$ e $b := 2\log_2 3$. Temos que

$$a^b = (\sqrt{2})^{2\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3 \in \mathbb{Q}.$$

$\therefore$ Existem números irracionais a e b tais que a^b seja racional.

□

O leitor concordará certamente que a segunda demonstração é mais informativa do que a primeira. Elementos precisos nas condições do enunciado são apresentados.

Embora os princípios da lógica clássica possam ser muito intuitivos e as aplicações imensas – só a título de exemplo, a lógica de primeira ordem,[3] que está na base da linguagem de programação Prolog [16], tem aplicações na verificação sequencial de programas, no *design* de circuitos, em robótica, em inteligência artificial, em processamento de língua natural, etc. – não são a única forma de raciocínio. Dependendo do ponto de vista e dos objetivos a alcançar, poderá ser vantajoso usar outras lógicas.

3. LÓGICA INTUICIONISTA

A busca do *construtivo* em oposição ao meramente *verdadeiro* surgiu nos finais do século XIX, em resposta ao uso cada vez mais generalizado de noções e métodos abstractos/infinitários na prática matemática. O surgimento de paradoxos e inconsistências na formalização inicial da teoria de conjuntos, em plena viragem do século, veio aumentar os receios de que a matemática não estivesse alicerçada em pilares sólidos. Os matemáticos dividiam-se, então, entre os que achavam que o raciocínio clássico devia ser permitido, e haveria forma de o justificar finitisticamente (como David Hilbert) e os que consideravam (como L. E. J. Brouwer) que a matemática devia evitar argumentos não construtivos. Para uma percepção mais palpável do clima intelectual (com vigorosas discussões) que se vivia à época, sugerimos a leitura de [6].

Há inúmeras variantes no construtivismo. Provavelmente, a mais conhecida é o *intuicionismo*, introduzido por Brouwer no início do século XX como um programa de reconstrução da matemática. Mais tarde, a lógica intuicionista seria rigorosamente formalizada através de matemáticos como Arend Heyting, Andrey Kolmogorov, Valery Glivenko, Gerhard Gentzen, Kurt Gödel e Dag Prawitz.

O intuicionismo caracteriza-se por não aceitar, ao contrário da lógica clássica, o princípio do terceiro excluído $A \vee \neg A$.

Como a lógica por detrás do intuicionismo é uma de demonstrabilidade e não de verdade, para que $A \vee \neg A$ seja aceite (i.e., para se ter uma prova de $A \vee \neg A$), seria preciso termos uma prova de A ou uma prova de $\neg A$.

Ora, afirmações como

"P *é igual a* NP *ou* P *não é igual a* NP"[4]

não são intuicionisticamente aceites pois não temos uma prova de $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ nem da sua negação.

Enquanto o leitor terá experiência em ver se uma asserção é válida classicamente ou não (a propagação da verdade ao longo dos conectivos proposicionais $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ e a noção de verdade associada aos quantificadores $\forall$ e $\exists$ são prática comum), poderá estar a interrogar-se: "Como saber se uma asserção é válida intuicionisticamente?".

Informalmente, pense na propagação de demonstrabilidade.

Por exemplo, $A \wedge B$ será válida intuicionisticamente se tivermos ambas, uma prova de A e uma prova de B. A ideia é de que ambas, em conjunto, constituem uma prova da conjunção.

A implicação $A \rightarrow B$ será válida intuicionisticamente, i.e., temos uma prova da implicação, se para cada prova de A formos capazes de produzir uma prova de B. Ter uma prova de $\exists x A(x)$ é ter um elemento a do domínio de x e uma prova de $A(a)$. Uma prova de $\neg A$ é uma construção que transforma cada suposta prova de A numa contradição.

Para uma completa formalização da lógica intuicionista, consulte [10].

Dado o seu carácter construtivo, a lógica intuicionista tem não só aplicações em matemática mas também em teoria da computação, funcionando como base para expressar especificações e verificar programas. Um momento chave na ligação entre lógica intuicionista e teoria da computação deu-se com o *isomorfismo de Curry-Howard* [15], quando estes dois matemáticos se aperceberam de que deduções intuicionistas apenas com implicação correspondiam à linguagem funcional conhecida como *cálculo-lambda simplesmente tipado.* A lógica era uma linguagem de programação, e a linguagem de programação uma lógica.

Voltando às duas demonstrações apresentadas na secção anterior, embora ambas classicamente válidas, deve agora ser claro que só a última é aceite intuicionisticamente (a primeira usa o princípio do terceiro excluído).

Formalizando convenientemente as lógicas clássica e intuicionista num sistema formal (axiomas + regras de dedução), podemos expressar a primeira (*LC*) como a segunda (*LI*) enriquecida com um único axioma: a lei do terceiro excluído, i.e.

$$LC = LI + (A \vee \neg A).$$

Embora totalmente correto, o último parágrafo pode levar o leitor ao engano, concluindo, por exemplo, que a lógica clássica seria mais abrangente, enquanto a lógica intuicionista validaria menos expressões. Afinal, $A \vee \neg A$ é válida classicamente mas não intuicionisticamente.

[2] Esta equivalência pressupõe a lógica clássica formalizada num sistema formal com axiomas e regras de dedução, e.g. sistema de Hilbert, cálculo de sequentes, cálculo de dedução natural, etc. Para uma apresentação detalhada dos primeiros dois sistemas, consulte [2], o sistema de dedução natural, a par com os outros dois sistemas, é apresentado em [18] e [12].

[3] Também conhecida por cálculo de predicados.

[4] Relembramos que a questão de P ser ou não igual a NP, colocada em 1971 por Stephen Cook, continua em aberto e a resposta poderá ter enorme impacto em ciência da computação. O Clay Mathematics Institute oferece desde o ano 2000 um prémio de um milhão de dólares a quem apresente a primeira resposta correta à questão. Para uma explicação do problema P *versus* NP sugerimos a consulta de [5].

Tal é apenas uma ilusão!

A lógica intuicionista é muito mais poderosa, podendo expressar todo o raciocínio clássico. O segredo está em que devemos percecionar os conectivos da lógica intuicionista não na mesma dinâmica dos da lógica clássica mas como um refinamento destes.

Ora vejamos:

enquanto classicamente (pelas leis de De Morgan e da dupla negação) se tem que $A \vee B$ é logicamente equivalente a $\neg(\neg A \wedge \neg B)$, i.e.,

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B),$$

ou seja, classicamente a disjunção coincide com a negação da conjunção das negações (e, portanto, a validade de uma segue automaticamente da validade da outra), intuicionisticamente, são asserções distintas.

Analisemos o seguinte caso particular (em que B é $\neg A$). Classicamente, temos:

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge A)$$

que, como sabemos, é uma equivalência entre asserções válidas (verdadeiras).

Ora intuicionisticamente, como já vimos, $A \vee \neg A$ não é, em geral, válida (nem sempre se consegue exibir uma prova de A ou de $\neg A$), mas $\neg(\neg A \wedge A)$ é intuicionisticamente válida (qualquer suposta prova de $\neg A \wedge A$, i.e., uma prova de A e uma prova de $\neg A$, nos levaria a uma contradição).

Enquanto no cálculo clássico a disjunção não acrescenta absolutamente nada em relação à negação e à conjunção, podendo ser definida através destes últimos conectivos, a disjunção intuicionista é algo novo, um grau de refinamento acima, inexistente na lógica clássica.

Idêntico comentário poderia ser feito em relação ao quantificador existencial. Em lógica clássica, $\exists$ podia não ser um símbolo primitivo, sendo simplesmente definido através da negação e do quantificador universal através de

$$\exists x A(x) :\Leftrightarrow \neg \forall x \neg A(x).$$

Quando classicamente afirmamos que $\exists x A(x)$, não é necessário que conheçamos nenhum elemento nessas condições, basta saber que não é verdade que nenhum esteja nessas condições; em lógica intuicionista, $\exists x A(x)$ é mais forte do que $\neg \forall x \neg A(x)$, realmente requer a apresentação da testemunha.

Que o raciocínio intuicionista é um refinamento do raciocínio clássico, contendo este último, fica evidente através do seguinte (bem conhecido) resultado, que apresenta uma tradução[5] da lógica clássica na lógica intuicionista:

Proposição 2. *Considere a seguinte tradução $(\cdot)^{\dagger}$ de fórmulas da lógica clássica em fórmulas da lógica intuicionista, definida indutivamente por* [6]:

$$\begin{array}{ll}
A_{\mathrm{at}}^{\dagger} & :\equiv \neg\neg A_{\mathrm{at}}, \text{ se } A_{\mathrm{at}} \text{ é uma fórmula atómica} \\
(A \wedge B)^{\dagger} & :\equiv A^{\dagger} \wedge B^{\dagger} \\
(A \vee B)^{\dagger} & :\equiv \neg(\neg A^{\dagger} \wedge \neg B^{\dagger}) \\
(A \to B)^{\dagger} & :\equiv A^{\dagger} \to B^{\dagger} \\
(\forall x A)^{\dagger} & :\equiv \forall x A^{\dagger} \\
(\exists x A)^{\dagger} & :\equiv \neg \forall x \neg A^{\dagger}
\end{array}$$

Se A é classicamente válida então $A^{\dagger}$ é intuicionisticamente válida.

Demonstração. A demonstração é por indução no tamanho da derivação de A em lógica clássica[7]. Veja [15].

□

Ou seja, temos uma imersão da lógica clássica na lógica intuicionista.

LÓGICA LINEAR

Por volta de 1987, motivado por um entendimento mais profundo da semântica do cálculo-lambda, Jean-Yves Girard [8] introduz uma nova lógica, a *lógica linear.* Enquanto a lógica clássica assenta no conceito de verdade e a lógica intuicionista, no de demonstrabilidade, a lógica linear pretende captar a ideia de *posse de recursos e consumos*. Embora, com esta parca descrição, a ligação não se adivinhe de imediato, veremos adiante que a lógica linear é muitíssimo expressiva, sendo inclusive um refinamento da lógica clássica e da intuicionista.

Tentemos motivar a ideia por detrás da lógica linear com um exemplo.

Suponha que sabe que as seguintes asserções são válidas:

1. A
2. $A \to B$
3. $A \to C$.

Num raciocínio clássico ou intuicionista, poderíamos concluir que A, B e C são todas asserções válidas. Em lógica clássica, basta atentar na tabela de verdade para a implicação apresentada na Secção 2: implicações verdadeiras com antecedente verdadeiro têm de ter consequente verdadeiro. Em lógica intuicionista, basta observar que se estamos na posse de uma prova de A e temos forma de a partir de uma prova de A chegar não só a uma prova de B mas também a uma prova de C, no final garantimos provas para A, B e C.

O raciocínio da lógica linear é diferente. Pense em recursos e na implicação $A \to B$ como indicando que, tendo o recurso A, posso produzir o recurso B (note, contudo, que nesse processo o recurso inicial A é consumido). Se temos A e se sabemos que de A podemos produzir B e de A podemos produzir C, em lógica linear podemos deduzir B ou deduzir C, mas não ambos. Usar A na implicação 2. acima irá consumi-lo, não estando já mais disponível para a implicação 3. e vice-versa.

Note que a lógica por detrás das receitas culinárias ou das experiências químicas é linear. Como veremos no final da secção, o universo de aplicações deste tipo de raciocínio é, todavia, muito mais vasto!

Enquanto nas lógicas clássica e intuicionista usamos os mesmos símbolos $\neg, \wedge, \vee, \to$ para designar conectivos ainda que com diferentes graus de refinamento consoante a lógica (relembramos, por exemplo, que o $\vee$ intuicionista é mais refinado do que o $\vee$ clássico), em lógica linear usamos símbolos diferentes, correspondendo, nalguns casos, a uma duplicação dos conectivos anteriores.

Por exemplo, a implicação da lógica linear, a tal que segue a dinâmica do consumo de recursos, é denotada por $\multimap$ para a distinguir da habitual $\to$.

De ora em diante, por lógica linear referimo-nos à lógica linear intuicionista e não à lógica linear clássica (esta última tem mais conectivos sem ganho em poder expressivo).

A título de curiosidade, na lógica linear, além de $\multimap$, existem (entre outros) conectivos como:

$$\otimes, \&, !.$$

Para uma completa apresentação da sintaxe da lógica linear, consulte [17].

Os conectivos $\otimes$ e $\&$ correspondem a diferentes formas de $\wedge$.

Imagine que de $A \wedge B$ se deduz C e que nessa dedução ambos A e B são essenciais. Essa noção cumulativa (multiplicativa) de conjunção é expressa em lógica linear pelo conectivo $\otimes$. Num cenário diferente, imagine que de A se deduz C, então obviamente pode concluir que de $A \wedge B$ se deduz C. Nesta última conjunção, para deduzir C não precisa de A e B em simultâneo, escolhe qual deles usa, neste caso o A. Esta última noção não-cumulativa (aditiva) de conjunção é captada pelo conectivo $\&$. É usual pensar-se em $\otimes$ como significando "ambos" e em $\&$ como "estando ambos disponíveis (e daí o seu carácter conjuntivo), optamos por apenas um". O exemplo seguinte ajuda a ilustrar a coexistência das duas formas de conjunção. Imagine uma máquina de refrigerantes que contém dois tipos de bebidas, A e B, custando 1 euro cada, e que o valor que introduzimos na máquina tem de coincidir exatamente com o custo dos produtos selecionados. Se introduzirmos duas moedas de 1 euro podemos obter $A \otimes B$ mas não $A \& B$. Note que na primeira situação ($A \otimes B$), adquirimos ambas as bebidas, o que corresponde exatamente ao valor dos 2 euros introduzidos na máquina. Na segunda situação ($A \& B$) ambos os recursos estão disponíveis (i.e., existem na máquina ambas as bebidas) mas vemo-nos obrigados a optar por apenas uma delas, e qualquer uma das bebidas isoladamente não corresponde a um custo de 2 euros. Todavia, se introduzirmos apenas 1 euro na máquina obtemos $A \& B$, i.e. podemos escolher qual a bebida que queremos dentre A e B, mas não $A \otimes B$, pois a máquina não libertará ambas as bebidas mediante o pagamento de apenas 1 euro.

O conectivo ! (que se lê *bang*) existe em lógica linear para que, com o foco em manter registo de consumos, não se perca a expressividade das lógicas anteriores. Essencialmente, quando temos $!A$ podemos pensar no recurso A como sendo ilimitado, isto é, temos tantas cópias de A quantas quisermos. É como se nessa situação em particular escolhêssemos deixar de pensar em consumíveis para voltar à dinâmica da verdade ou da demonstrabilidade. Com o exponencial !, a lógica linear capta facilmente o raciocínio intuicionista e, por maioria de razão, o clássico.

A afirmação anterior é confirmada pela tradução abaixo[8] (uma das várias possíveis) da lógica intuicionista na lógica linear:

[5] Existem variadíssimas traduções da lógica clássica na lógica intuicionista tendo sido a primeira introduzida por Kolmogorov [9] em 1925. Para um estudo comparativo das traduções mais frequentes na literatura, veja [7].

[6] Uma fórmula atómica, abaixo representada por A_{at}, é uma fórmula que não contém nenhuma fórmula mais simples, ou seja, é uma fórmula que não contém $\neg, \wedge, \vee, \to, \forall$ nem $\exists$.

[7] Estamos a considerar sistemas dedutivos fomais (corretos e completos) para a lógica clássica e para a lógica intuicionista.

[8] A tradução usada na Proposição 3 foi apresentada por Girard em [8].

Proposição 3. *Considere a seguinte tradução* $(\cdot)^*$ *de fórmulas da lógica intuicionista para fórmulas da lógica linear, definida indutivamente por:*

$$\begin{array}{ll}
A^*_{\mathsf{at}} & :\equiv A_{\mathsf{at}}, \text{ se } A_{\mathsf{at}} \not\equiv \perp \text{ é uma fórmula atómica} \\
\perp^* & :\equiv 0 \\
(A \wedge B)^* & :\equiv A^* \,\&\, B^* \\
(A \vee B)^* & :\equiv\, !A^* \oplus\, !B^* \\
(A \to B)^* & :\equiv\, !A^* \multimap B^* \\
(\forall x A)^* & :\equiv \forall x A^* \\
(\exists x A)^* & :\equiv \exists x !A^*
\end{array}$$

Se A se prova em lógica intuicionista, então A^* prova-se em lógica linear.[9]

Demonstração. A demonstração sai fora do âmbito deste artigo. Consulte [14].

□

Ou seja, existe uma imersão da lógica intuicionista, e portanto também da clássica, na lógica linear.

Note que o conectivo intuicionista $\to$ corresponde em lógica linear a $\multimap$ com o antecedente precedido por !. Tal vem completamente de encontro à discussão dos conectivos feita anteriormente: a implicação $\to$, ao contrário de $\multimap$, não consome o antecedente, razão pela qual é traduzida recorrendo a !, que torna o recurso ilimitado.

A lógica linear foi acolhida com grande entusiasmo por lógicos matemáticos mas também (até talvez mais enfaticamente) por investigadores em ciência da computação. Dada a sua capacidade de controlar recursos, captou imediatamente o interesse de *designers* de linguagens de programação. Note que, por exemplo, na implementação de *software*, a gestão de recursos é uma questão de grande relevância. Entre outras, destacamos a aplicação da lógica linear à programação funcional, à inteligência artificial e à teoria da simultaneidade (*concurrency*). Veja [4].

Dos inúmeros artigos científicos que anualmente surgem sobre lógica linear, apenas uma minoria é sobre a lógica linear em si mesma, sendo a maioria trabalhos em que a lógica linear é aplicada com sucesso a diversas áreas (praticamente todas) da ciência da computação, algumas com enorme impacto prático. Tal facto espelha bem o carácter multidisciplinar da lógica introduzida por Girard.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não queremos de forma alguma que o leitor fique com a ideia de que as lógicas levemente dadas a conhecer neste artigo – intuicionista e linear – esgotam o leque das lógicas não-clássicas. Tal está completamente longe da verdade. A título de exemplo, apontamos outras duas: a *lógica modal* [1] (que permite expressar conceitos como os de possibilidade, necessidade, probabilidade, eventualidade,... e tem aplicações a diversas áreas da ciência da computação, e.g., inteligência artificial, engenharia de *software*, linguística computacional) e a *lógica fuzzy* [13] (que lida com raciocínio que não é exato nem fixo, mas sim aproximado: o valor de verdade varia no intervalo real [0,1] e tem notáveis aplicações práticas. Talvez a mais mediática tenha sido o uso de lógica *fuzzy* para controlar comboios de alta velocidade em Sendai, Japão, aumentando consideravelmente a eficiência e o conforto e diminuindo o tempo de paragem. Entre outras aplicações concretas, destacamos o reconhecimento de escrita manual em plataformas digitais, a previsão de terramotos e o controlo da ventilação dos sistemas de ar condicionado).

AGRADECIMENTOS

A autora agradece o apoio da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia (bolsas SFRH/BPD/34527/2006 e SFRH/BPD/93278/2013), do CMAF – Centro de Matemáica e Aplicações Fundamentais da Uni- versidade de Lisboa e do NIM – Núcleo de Investigação em Matemática da Universidade Lusófona. A autora agradece também ao revisor anónimo sugestões pertinentes, nomeadamente em termos de bibliografia.

REFERÊNCIAS

[1] P. Blackburn, M. Rijke, Y. Venema. *Modal Logic*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 53, Cambridge University Press, 2002.

[2] S. Buss. "An Introduction to Proof Theory", *Handbook of Poof Theory*. Edited by S. R. Buss, Elsevier Science, 1998.

[3] D. van Dalen. *Logic and Structures*. Springer-Verlag (fourth edition), 2008.

[4] T. Ehrhard, J.-Y. Girard, P. Ruet, P. Scott. *Linear Logic in Computer Science*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 316, Cambridge University Press, 2004.

[5] F. Ferreira. "O problema P *versus* NP". *2000 Matemática Radical*. Coletânea organizada por Miguel Ramos, Jorge Nuno Silva e Luís Trabucho. Textos de Matemática, Departamento de Matemática da Universidade de Lisboa, pp. 1-15, 2002.

[6] F. Ferreira. "*Grundlagenstreit* e o intuicionismo Brouweriano". *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*. 58:1-23, 2008.

[7] G. Ferreira, P. Oliva. "On the Relation Between Various Negative Translations". *Logic, Construction, Computation*. Ontos-Verlag Mathematical Logic Series, 3:227-258, 2012.

[8] J.-Y. Girard. "Linear logic". *Theoretical Computer Science*, 50(1):1-102, 1987.

[9] A.N. Kolmogorov. "On the Principle of the Excluded Middle" (Russian). *Mat. Sb.*, 32:646-667, 1925.

[10] G. Mints. *A Short Introduction to Intuitionistic Logic*. The University Series in Mathematics, Springer US, 2002.

[11] Augusto J. Franco de Oliveira. *Lógica e Aritmética: Uma Introdução Informal aos Métodos Formais*. Gradiva, Lisboa, 1991.

[12] Augusto J. Franco de Oliveira. "Sistemas dedutivos". Publicação *online* acessível em: *https://sites.google.com/site/tutasplace/Home/cursos*.

[13] T. Ross. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. Wiley, 2004.

[14] H. Schellinx. "Some syntactical observations on linear logic". *Journal of Logic and Computation*, 1(4):537-559, 1991.

[9] Pense no símbolo $\perp$ como significando absurdo (é comum formular as lógicas clássica e intuicionista numa linguagem em que os símbolos primitivos são $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$ e $\exists$ e definir $\neg A$ como abreviando $A \to \perp$). Os símbolos 0 e $\oplus$ devem ser entendidos como uma versão linear do falso e da disjunção. Para uma completa formulação das lógicas intuicionista e linear consulte a Secção 3 de [2].

[15] M.H. Sørensen, P. Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 149, Elsevier, 2006.

[16] L. Sterling, E. Shapiro. *The Art of Prolog*. MIT Press Series in Logic Programming, *second edition*, 1994.

[17] A. S. Troelstra. "Lectures on Linear Logic". Center of the Study of Language and Information – Lecture Notes, 29, 1992.

[18] A. S. Troelstra, H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory, second edition*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 43, Cambridge University Press, 2000.

SOBRE A AUTORA

Gilda Ferreira é doutorada em Matemática, área de Álgebra, Lógica e Fundamentos, pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Detém atualmente uma bolsa de pós-doutoramento da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no Lasige (Laboratório de Sistemas Informáticos de Grande Escala) - Universidade de Lisboa. É Professora Auxiliar no Departamento de Matemática da Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias e membro do CMAF (Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais).