Simetrias do Temperamento Igual

Marta Raposo[a] e Rui Pacheco[b]

[b]Universidade da Beira Interior

[a]martaraposor@gmail.com e [b]rpacheco@ubi.pt.

Transposições e inversões são transformações no conjunto de todas as notas musicais recorrentemente utilizadas por músicos e compositores. No contexto do sistema de afinação de temperamento igual, transposições e inversões podem ser naturalmente identificadas com as transformações de Möbius que preservam um certo subconjunto discreto da espiral logarítmica.

1. TEMPERAMENTO IGUAL

Não vamos repetir aquela velha história do passeio de Pitágoras e dos martelos na oficina do ferreiro, mas relembremos a observação fundamental habitualmente atribuída ao mesmo Pitágoras: os sons produzidos ao pressionar pontos que dividem a corda de um monocórdio nas razões 1:2, 2:3 e 3:4 estão em extrema consonância, no sentido de que são "agradáveis" ao ouvido quando combinados entre si. Os métodos introduzidos por J. B. Fourier, no século XIX, trouxeram um entendimento mais profundo sobre o fenómeno. Uma corda esticada quando vibra produz um som que é a soma de várias ondas sinusoidais (os *harmónicos* do som produzido) com frequências múltiplas inteiras da *frequência dominante* (ou *natural*) da corda.

Denominamos por *nota musical* um som associado a uma única onda sinusoidal – e, portanto, a uma única frequência. Na realidade, tais sons puros não existem na natureza. Quando, por exemplo, se refere a nota *la*^{3}, o lá central do piano, pensamos na frequência dominante da respetiva corda (tipicamente ajustada para 440 Hz). Se a frequência de uma determinada nota é ω_0, então a *oitava acima* é a nota com frequência $2\omega_0$, aquela que corresponde à razão pitagórica 1:2. Homens e mulheres cantando em uníssono, na realidade fazem-no (bom, pensemos em cantores minimamente talentosos) com o intervalo de uma oitava. Este facto levou diferentes culturas a aceitar a oitava como intervalo de referência.

O ouvido humano tem a capacidade de distinguir dezenas de notas diferentes compreendidas num tal intervalo. De entre essas notas podemos selecionar algumas e organizá-las em sequências, da mais grave à mais aguda, que designaremos por *escalas*. Na tradição ocidental, consideram-se 12 notas no intervalo de uma oitava. A *escala cromática* é precisamente a sequência formada por essas 12 notas:

dó, dó♯, ré, ré♯, mi, fá, fá♯, sol, sol♯, lá, lá♯, si.

Mas a escolha do número 12 não é universal. Por exemplo, na cultura indiana é frequente adivisão da oitava em 22 *shrutis* [1].

Estabelecidas 12 notas, coloca-se o problema, diga-se pouco pacífico [3, 4], de encontrar valores para as razões das respetivas frequências: o problema do *temperamento* da escala cromática. A matemática envolvida nesta discussão é rica, tanto em relação à modelação do fenómeno de emissão, propagação e perceção do som [1], como em relação à construção artesanal de instrumentos musicais compatíveis com os diferentes sistemas adotados [6]. A divisão em intervalos iguais, o *temperamento igual*, adequa-se com facilidade à construção e à execução de instrumentos de teclas, como o piano ou o cravo. Neste caso, a razão entre as frequências de duas notas consecutivas é dada por $\tau = \sqrt[12]{2}$, um número irracional! Se a nota de referência tem frequência ω_0, as 12 notas da escala cromática terão frequências dadas por $\omega_k = \tau^k\omega_0$, com $k = 0, 1, \ldots, 11$. A melhor aproximação à *quinta pitagórica* (a nota associada à frequência $\frac{3}{2}\omega_0$) ocorre para $k = 7$: $\omega_7 \approx 1.4983\omega_0$.

Se esta diferença parece não perturbar muito os ouvidos dos músicos mais experimentados, outros intervalos no temperamento igual podem ser bem mais delicados de compatibilizar com as consonâncias "naturais" observadas por Pitágoras [3]. Não obstante, o temperamento igual é hoje amplamente adotado na afinação de diferentes instrumentos musicais, como o piano e a guitarra.

2. CONJUNTO DAS NOTAS MUSICAIS NO TEMPERAMENTO IGUAL

Fixemos uma nota de referência, digamos a nota *do*^{3}, o dó central do piano, com frequência ω_0. Seja $\mathbf{M}$ o conjunto das notas musicais do temperamento igual, ordenadas de acordo com o valor das frequências correspondentes: $\omega_n = \tau^n\omega_0$, com $n \in \mathbb{Z}$. Temos portanto uma bijecção $F : \mathbf{M} \to \mathbb{Z}$ que preserva a relação de ordem entre os dois conjuntos,

$$\ldots, F(si^2) = -1, F(do^3) = 0, F(do\sharp^3) = 1,\ F(re^3) = 2, \ldots$$

de acordo com a seguinte figura:

Figura 1. Escala cromática.

Os pares ordenados $(X, Y) \in \mathbf{M} \times \mathbf{M}$ serão designados por *intervalos musicais*. Consideremos a aplicação *amplitude* $J : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{Z}$ definida por $J(X,Y) = F(X) - F(Y)$. Seguindo a terminologia usual, intervalos musicais de *um tom* são os pares (*X*, *Y*) para os quais $J(X, Y) = \pm 2$ e intervalos de *meio-tom* são os pares (*X*, *Y*) para os quais $J(X, Y) = \pm 1$. Por exemplo, $J(mi^2, re^3) = F(mi^2) - F(re^3) = -10$, o que corresponde a uma *sétima menor inferior* (10 meio-tons).

3. TRANSPOSIÇÕES E INVERSÕES

Dado um inteiro *k*, a *transposição musical* por *k* meio-tons é a transformação $T_k : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ que "adiciona" *k* meios-tons a todos as notas, preservando desta forma a relação de ordem e a amplitude dos intervalos. Ou seja,temos $T_k(Z_n) = Z_{n+k}$, onde Z_n é a nota musical correspondente a $n : F(Z_n) = n$. Por outro lado, as *inversões musicais* são transformações no conjunto **M** que também preservam a amplitude dos intervalos mas que invertem a relação de ordem. Mais concretamente, dados dois inteiros *i* e *j*, com $0 \leq |j - i| \leq 1$, a inversão $I_{i,j} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ é definida por $I_{i,j}(Z_n) = Z_{i+j-n}$. Claramente, $I_{i,j} = I_{j,i}$. Quando $i = j$, também denotamos $I_i = I_{i,i}$, a *inversão de* **M** *relativamente a* Z_i. Neste caso, $I_i(Z_i) = Z_i$.

Por exemplo, a transposição por sete meios-tons do subconjunto $K = \{Z_0, Z_4, Z_7\}$, que corresponde ao acorde habitualmente designado por *Dó Maior*, resulta no conjunto $T_7(K) = \{Z_7, Z_{11}, Z_{14}\}$ (acorde de *Sol Maior*). Por outro lado, a inversão do mesmo acorde relativamente a $Z_1 = do\sharp^3$ resulta no acorde $I_1(K) = \{Z_2, Z_{-2}, Z_{-5}\}$ (acorde de *Sol Menor*).

Observação. Em teoria musical, o termo *inversão* pode ter diferentes significados. O conceito de inversão de um acorde que estamos aqui a tratar é diferente do conceito de inversão associado à modificação das *linhas de baixo* dos acordes. Neste segundo sentido, a *primeira inversão* do acorde $K = \{Z_0, Z_4, Z_7\}$, por exemplo, é o acorde $K' = \{Z_4, Z_7, Z_{12}\}$, ou seja, todas as notas de K' são iguais às de K a menos de uma oitava, mas a nota mais grave, o *baixo*, passou a ser a nota Z_4.

Transposições e inversões são recursos frequentemente utilizados por músicos e compositores. Na figura 2 vemos um exemplo extraído da obra de J. S. Bach. O *Cânone a 2 "Quaerendo Invenietis"*, da Oferenda Musical (BWV 1079), que consiste num cânone por inversão, à distância de sétima menor:

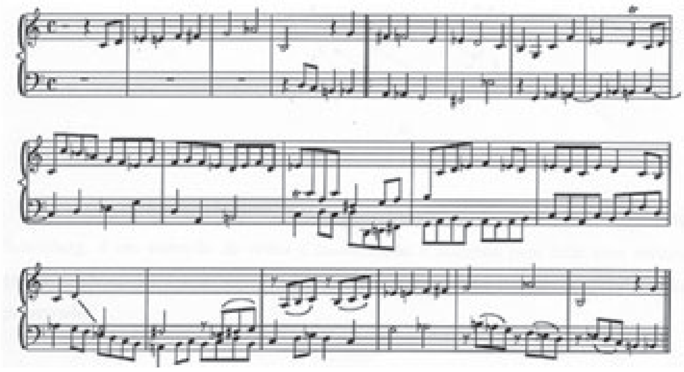

Figura 2. Cânone por inversão.

A linha melódica inferior inverte os intervalos da linha superior. A voz inferior é igual a $I_{-5} = T_{-10} \circ I_0$ da voz superior. Mais exemplos podem ser encontrados em [5].

Uma transposição por *k* meios-tons, seguida de uma outra transposição por k' meios-tons, resulta numa transposição por $k + k'$ meios-tons; uma transposição seguida de uma inversão é equivalente a uma inversão; uma inversão seguida de outra inversão corresponde a fazer uma única transposição. Mais explicitamente,

$$T_k \circ T_{k'} = T_{k+k'} \qquad I_{i,j} \circ I_{p,l} = T_{i+j-l-p}$$
$$T_k \circ I_{i,j} = I_{i+\lceil k/2 \rceil, j+\lfloor k/2 \rfloor} \qquad I_{i,j} \circ T_k = I_{i-\lfloor k/2 \rfloor, j-\lceil k/2 \rceil},$$

onde $i \leq j$, $\lfloor k/2 \rfloor$ é o maior inteiro *n* tal que $n \leq k/2$ e $\lceil k/2 \rceil$ é o menor inteiro *m* tal que $\mathrm{k}/2 \leq m$.

Assim, o conjunto de todas as inversões e transposições admite uma estrutura natural de *grupo não abeliano*. Recordamos que um par $(G, \circ)$ constituído por um conjunto *G*, não vazio, e uma operação binária $\circ$ diz-se um *grupo* quando verifica os seguintes axiomas:

(1) *Associatividade.*
Para quaisquer $x, y, z \in G$, $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$;

(2) *Existência de identidade.*

Existe $e \in G$, a *identidade* do grupo, tal que, para todo $x \in G, x \circ e = e \circ x = x$;

(3) *Existência de inverso.*

Para cada $x \in G$, existe $x' \in G$, o *inverso* de x, tal que $x \circ x' = x' \circ x = e$.

O grupo diz-se *abeliano* se $x \circ y = y \circ x$ para todos os elementos $x, y \in G$. Em relação ao grupo das transposições e inversões, o inverso de T_k é T_{-k}, o inverso de qualquer inversão é ela própria e a identidade é a transposição T_0.

Uma forma usual de descrever geometricamente este grupo, que denotaremos por $G_{\mathbf{M}}$, consiste em identificar as 12 notas da *escala cromática* $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{11}$ com os 12 vértices de um dodecágono regular. Assim, inversões e transposições correspondem a elementos do grupo de simetria do dodecágono, o *grupo diedral* D_{12}. No entanto, este modelo não distingue notas que difiram por oitavas nem reflete qualquer propriedade do temperamento utilizado. Nas duas secções seguintes apresentamos um modelo para o conjunto $\mathbf{M}$ das notas musicais no sistema temperado que resolve estas dificuldades e a correspondente descrição geométrica do grupo $G_{\mathbf{M}}$.

4. AS TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

Uma *transformação de Möbius* é uma transformação no plano complexo que é representada por uma fração racional da forma

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

onde a, b, c e d são números complexos que satisfazem a condição $ad - bc \neq 0$. Prova-se que as transformações de Möbius, com a operação binária definida pela composição de transformações, formam um grupo, que denotaremos por **Mob**, o *grupo de Möbius*. Por exemplo, o inverso da transformação (1) é dado por

$$z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}.$$

Vejamos alguns exemplos de transformações de Möbius:

(1) *Translação.* Para qualquer número complexo $b = b_1 + \mathrm{i}b_2$, onde i é a unidade imaginária, a transformação $z \mapsto z + b$ representa uma translação no plano pelo vetor $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

(2) *Rotação.* Para qualquer $a \in \mathbb{C}$ com $|a| = 1$, a transformação $z \mapsto az$ representa uma rotação no plano em torno da origem. Se considerarmos a representação em coordenadas polares de $a = e^{\mathrm{i}\theta_0}$ e $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$, temos $az = |z|e^{\mathrm{i}(\theta+\theta_0)}$, uma rotação de ângulo θ_0 (tomando como sentido positivo o sentido anti-horário).

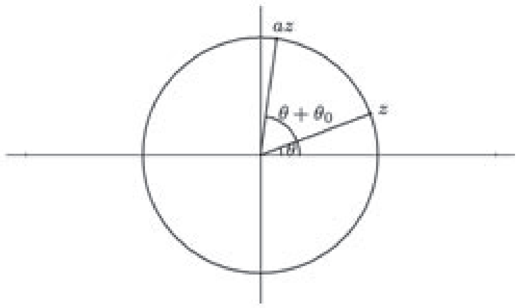

Figura 3. Rotação de ângulo θ_0.

(3) *Homotetia.* Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, $z \mapsto az$ representa uma homotetia no plano centrada na origem e de razão a.

(4) *Inversão seguida de reflexão.* Recorde-se que, dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r centrada em O e um ponto P diferente de O, o inverso P' de P relativamente a $\mathcal{C}$ é o único ponto sobre a semirreta OP que satisfaz $|OP||OP'| = r^2$. Em notação complexa, se $P = z$ e $\mathcal{C}$ é a circunferência unitária centrada na origem, então $P' = \frac{z}{|z|^2}$.

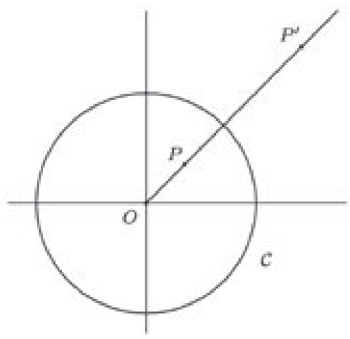

Figura 4. Inversão em relação a uma circunferência.

Por outro lado, $z \mapsto \bar{z}$ dá-nos a reflexão em relação ao eixo real.

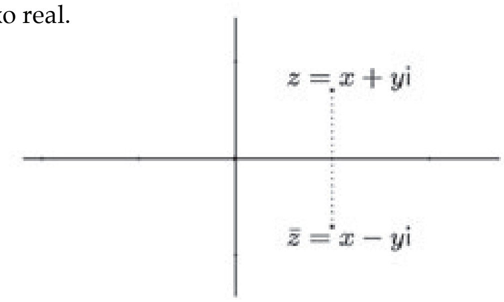

Figura 5. Reflexão em relação ao eixo real.

Assim, a transformação de Möbius $z \mapsto \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ representa uma inversão em relação à circunferência unitária centrada na origem seguida de uma reflexão.

Qualquer transformação de Möbius pode ser obtida por composição de translações, reflexões, rotações, inversões e dilatações. Com efeito, considerem-se as seguintes transformações: $g(z) = z + \frac{d}{c}$ (translação pelo vetor $\frac{d}{c}$); $h(z) = \frac{1}{z}$ (inversão seguida de reflexão); $m(z) = -\frac{ad-bc}{c^2}z$ (rotação e homotetia); $s(z) = z + \frac{a}{c}$ (translação pelo vetor $\frac{a}{c}$). Então, é possível provar que:

$$\frac{az+b}{cz+d} = s \circ m \circ h \circ g(z).$$

Observação. Uma *transformação conforme* é uma transformação que preserva ângulos. Ou seja, duas curvas que se intersetam num certo ponto P segundo um ângulo α são transformadas em outras duas curvas que se intersetam no transformado de P segundo o mesmo ângulo α. Pela teoria das funções de variáveis complexas, qualquer transformação de Möbius $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ é conforme. Devemos observar que, em geral, estas transformações não estão definidas em todo o plano complexo. Juntando a $\mathbb{C}$ um ponto ∞ no "infinito", podemos identificar a esfera unitária S^2 com o *plano completo* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ por meio de uma *projeção estereográfica*, que é uma transformação conforme. Desta forma, uma transformação de Möbius $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ corresponde a uma transformação conforme em S^2, fazendo $\infty \mapsto \frac{a}{c}$ e $-\frac{d}{c} \mapsto \infty$. Sabe-se que o grupo de Möbius é precisamente o grupo das tranformações conformes de S^2 que preservam a orientação [2].

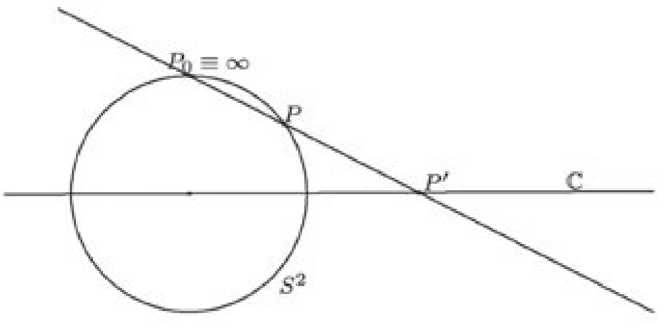

Figura 6. Projeção estereográfica.

5. A ESPIRAL LOGARÍTMICA E O TEMPERAMENTO IGUAL

A espiral logarítmica é um tipo de espiral que aparece frequentemente associado a diversos elementos na Natureza: conchas de certos moluscos, galáxias espirais ou ciclones tropicais, por exemplo. Face às suas propriedades singulares, Jacob Bernoulli designou-a por *Spira Mirabilis*.

A equação da espiral logarítmica, em termos de coordenadas polares (ρ, θ), é dada por $\rho = \rho_0 e^{\theta b}$, com $\rho_0 > 0$ e b constantes reais. Esta espiral pode ainda ser caracterizada pela seguinte propriedade: o ângulo β formado pela tangente à espiral no ponto (ρ, θ) e a correspondente reta radial é constante, mais precisamente, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{b}$.

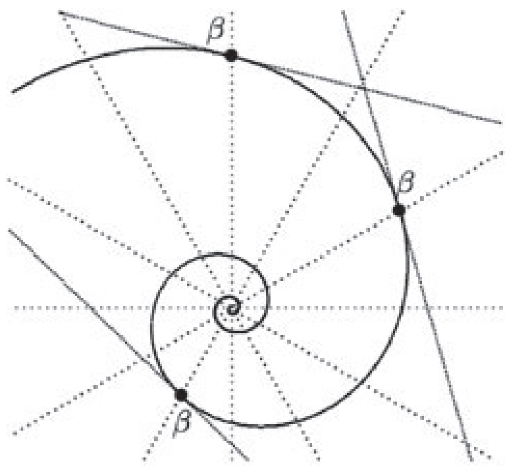

Figura 7. Espiral logarítmica.

Sejam $\mathcal{S}$ a espiral logarítmica $\rho = e^{\theta\frac{\ln 2}{2\pi}}$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{S}} \subset \mathbf{Mob}$ o seu subgrupo de simetria, isto é,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}} = \{f \in \mathbf{Mob} : f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}\}.$$

Este subgrupo é formado pelas transformações $z \mapsto \alpha_0 z$ e $z \mapsto \frac{\beta_0}{z}$, com $\alpha_0, \beta_0 \in \mathcal{S}$. De facto, se

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

preserva a espiral $\mathcal{S}$, então f também preserva os seus pontos limites, isto é, $f(0) = 0$ e $f(\infty) = \infty$; ou $f(0) = \infty$ e $f(\infty) = 0$. No primeiro caso teremos $b = 0$ e $c = 0$; logo, $f(z) = \frac{a}{d}z$; uma vez que $1 \in \mathcal{S}$, o seu transformado, $f(1)$, também deve estar em $\mathcal{S}$, logo, $\alpha_0 = \frac{a}{d} \in \mathcal{S}$. Do mesmo modo, no segundo caso, teremos $f(z) = \frac{b}{c}\frac{1}{z}$, com $\beta_0 = \frac{b}{c} \in \mathcal{S}$.

Seja $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ a imagem de $\mathbb{Z}$ por meio da aplicação

$$n \in \mathbb{Z} \mapsto z_n = e^{\frac{n}{12}\ln 2} e^{\mathrm{i}\frac{2\pi n}{12}} \in \mathcal{S}.$$

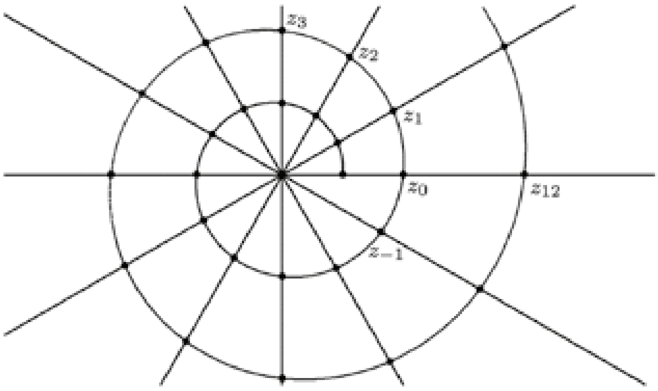

Figura 8. Representação em espiral do conjunto **M**.

Tendo em conta a identificação entre $\mathbb{Z}$ e o conjunto $\mathbf{M}$ estabelecida por F, obtemos uma nova representação para o conjunto das notas musicais do sistema de temperamento igual, aquela que a $Z_n \in \mathbf{M}$ associa o número complexo z_n. Repare-se que, se atribuirmos ao dó central do piano, $F(do^3) = 0$, a frequência $\omega_0 = 1$, a frequência de Z_i, relativamente ao sistema de temperamento igual, é dada por $\omega_i = \tau^i$, com $\tau = \sqrt[12]{2}$, ou seja, $\omega_i = |z_i|$.

Finalmente, designemos por $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_0} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ o subgrupo de simetria de $\mathcal{S}_0$. As transformações $z \mapsto \alpha_0 z$ e $z \mapsto \frac{\beta_0}{z}$ estão em $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_0}$ se, e só se, α_0 e β_0 estiverem em $\mathcal{S}_0$. Assim, o subgrupo $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_0}$ é formado pelas seguintes transformações:

$$z \mapsto z_i z; \qquad z \mapsto \frac{z_i}{z}.$$

A primeira destas transformações é dada por uma rotação de ângulo $\frac{2\pi i}{12}$ em torno da origem seguida de uma homotetia centrada na origem de razão τ^i; transforma z_k em z_{i+k}, logo corresponde à transposição T_i. A segunda transformação é dada por uma inversão em relação à circunferência unitária centrada na origem seguida de uma transformação do primeiro tipo; transforma z_k em z_{i-k}, correspondendo deste modo à inversão $I_{\lfloor i/2 \rfloor, \lceil i/2 \rceil}$.

6. CONCLUSÃO

Se identificarmos o conjunto $\mathbf{M}$ das notas musicais do sistema temperado com o subconjunto discreto

$$\mathcal{S}_0 = \{e^{\frac{n}{12}\ln 2} e^{i\frac{2\pi n}{12}} : n \in \mathbb{N}\}$$

da espiral logarítmica $\mathcal{S}$ definida em coordenadas polares por $\rho = e^{\theta \frac{\ln 2}{2\pi}}$, o grupo $G_{\mathbf{M}}$ das transposições e inversões é precisamente o grupo formado pelas transformações de Möbius que preservam $\mathcal{S}_0$.

Agradecimentos. Os autores gostariam de agradecer ao revisor deste artigo, pela leitura atenta e pelas muitas sugestões que ajudaram a melhorar uma versão preliminar, e ao Helder Vilarinho, pelo incentivo que deu para que o artigo fosse escrito.

7. REFERÊNCIAS.

[1] D. J. Benson, *Music – A Mathematical Offering*, Cambridge University Press. 2007.

[2] D. Blair, *Inversion Theory and Conformal Mapping*, Student Mathematical Library, American Mathematical Society. 2000.

[3] R. Duffin, *How Equal Temperament Ruined Harmony (and Why You Should Care)*, W. W. Norton & Company. 2008.

[4] S. Isacoff, *Temperament: How Music Became a Battleground for the Great Minds of Western Civilization*, Vintage, 2003.

[5] J. Paiva de Oliveira, *Teoria Analítica da Música do Século XX*, Fundação Calouste Gulbenkian. 1998

[6] B. Scimemi, "The Use of Mechanical Devices and Numerical Algorithms in the 18th Century for the Equal Temperament of the Musical Scale", *Mathematics and Music: A Diderot Mathematical Forum*, Springer Verlag. 2002.

SOBRE OS AUTORES

Marta Raposo é licenciada e mestre em Ensino de Matemática pela Universidade da Beira Interior e concluiu o Curso Complementar de Formação Musical no Conservatório da Covilhã.

Rui Pacheco é licenciado em Física e mestre em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e doutor em Matemática pela University of Bath, no Reino Unido. Desde 2004, é professor auxiliar no Departamento de Matemática na Universidade da Beira Interior.